详细解答

STEP III 2005，第 1 题

纯数学 · 三角方程与图像

> **STEP III 2005，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q1

关键思路

凡是形如 sin(某式) = cos(另一式) 的方程，都可以利用 $\cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$ 转化为关于两个自变量（argument）的命题。把这个做法用于 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$，便得出 $\sin x \mp \cos x$ 必须等于 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍，而 $|\sin x \pm \cos x|$ 的上界表明它根本太小，无法达到这样的值。至于草图，只要想清楚当内层自变量只在一个很短的区间内变动时，外层函数会对它产生甚么作用，便可画出。

解答

方程 $\sin A = \cos B$

由于 $\cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$，我们需要求 $\sin A = \sin C$ 的通解（general solution），其中 $C = \frac{\pi}{2} - B$。正弦函数在每个长度为 2π 的周期（period）内，对 $[-1, 1]$ 中的每个值都恰好取到两次，分别在 C 和 $\pi - C$（当该值为 ± 1 时，两者重合），所以

$$\sin A = \sin C \iff A = C + 2k\pi \text{ 或 } A = \pi - C + 2k\pi \quad \text{对某个整数} k.$$

代入 $C = \frac{\pi}{2} - B$：

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{\pi}{2} - B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} - B, \\ \text{或} \quad A &= \pi - \tfrac{\pi}{2} + B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} + B. \end{aligned}$$

因此 $\sin A = \cos B$ 当且仅当存在整数 n 使得 $A = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B$。两个方向都已涵盖，因为上面每一步都是“当且仅当”（if and only if）。（若要直接验证“若”的方向：$\sin((4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B) = \sin(\frac{\pi}{2} \pm B) = \cos B$，这里用到周期为 2π。）

上界与方程 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$

利用复角公式（compound angle formula），

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cos \tfrac{\pi}{4} \pm \cos x \sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin(x \pm \tfrac{\pi}{4}),$$

又因为对任何 θ 都有 $|\sin\theta| \le 1$，所以对所有 x 都有 $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$，这正是所要证明的。

现在假设对某个 x 有 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$。在第一个结果中取 $A = \sin x$ 和 $B = \cos x$，可知存在整数 n 使得

$$\sin x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2} \pm \cos x, \qquad \text{即} \qquad \sin x \mp \cos x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2}.$$

想一想 为甚么右边不可能很小?

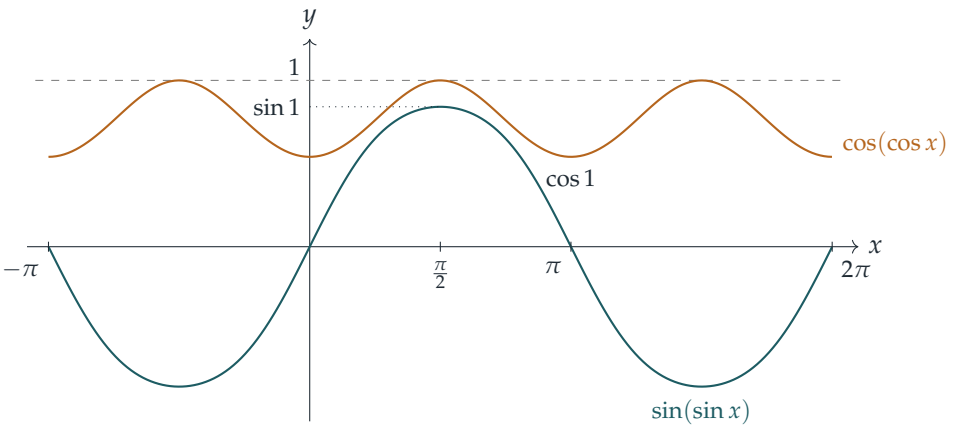
因为 $4n+1$ 是奇数，它永远不等于 0，所以 $|4n+1| \ge 1$，右边的绝对值（modulus）最少是 $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$。而左边的绝对值最多是 $\sqrt{2} \approx 1.414$。由于 $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$（两边平方：$2 < \frac{\pi^2}{4}$，因为 $\pi^2 > 9 > 8$），这是不可能的。因此 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ 无解。

绘画 $y = \sin(\sin x)$ **和** $y = \cos(\cos x)$ **的草图**

$y = \sin(\sin x)$。内层函数 $\sin x$ 的取值范围是 $[-1, 1]$，而在这个区间上 sin 是递增的（因为 $[-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$）。所以 $\sin(\sin x)$ 的升降与 $\sin x$ 完全一致：它的周期为 2π，是奇函数（odd function），在 $x = n\pi$ 处为零，在 $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 处取极大值 $\sin 1 \approx 0.841$，在 $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ 处取极小值 $-\sin 1$。它的斜率（gradient）$\cos x \cos(\sin x)$ 在原点等于 1。它看起来像一条稍为压扁了的正弦曲线。

$y = \cos(\cos x)$。由于 $\cos(-u) = \cos u$ 及 $\cos(x+\pi) = -\cos x$，我们有 $\cos(\cos(x+\pi)) = \cos(\cos x)$：这个图像的周期为 π，而且是偶函数（even function）。在 $[-1,1]$ 上，$\cos u$ 在 $u = 0$ 处最大（$= 1$），在 $u = \pm 1$ 处最小（$= \cos 1 \approx 0.540$）。所以 $\cos(\cos x)$ 在 $\cos x = 0$ 之处，即 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$，取极大值 1；在 $\cos x = \pm 1$ 之处，即 $x = n\pi$，取极小值 $\cos 1$。它永远介乎 0.54 与 1 之间。

根据上一部分，两条曲线永不相交；又因为 $\cos(\cos 0) = \cos 1 > 0 = \sin(\sin 0)$，由连续性（continuity）可知余弦曲线处处严格位于正弦曲线之上。两者在 $x \approx 0.88$ 附近最为接近（相距约 0.107），那里 $\sin(\sin x)$ 几乎到达顶峰，而 $\cos(\cos x)$ 仍在上升。



绘画 $y = \sin(2\sin x)$ 的草图

这个函数同样以 2π 为周期，而且是奇函数，零点在 $x = n\pi$，所以只需弄清楚 $0 \leq x \leq \pi$ 的情况；在这个区间上，图像关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称（因为 $\sin(\pi - x) = \sin x$）。

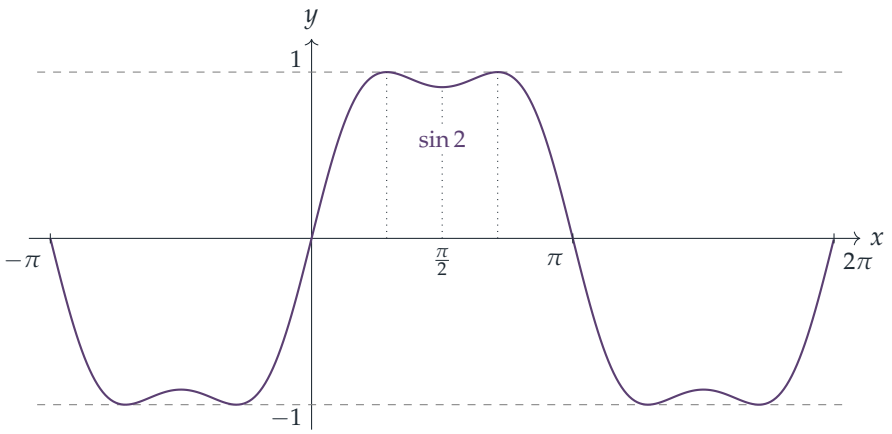
现在的分别在于，内层自变量 $u = 2\sin x$ 在这个区间上的取值范围是 $[0, 2]$，而 $2 > \frac{\pi}{2}$。所以当 x 由 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时：

- u 由 0 上升到 $\frac{\pi}{2}$，同时 $\sin x$ 上升到 $\frac{\pi}{4}$，此时 $x = \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 0.903$；期间 $y = \sin u$ 由 0 上升到它的极大值 1；
- u 继续由 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 2，在这一段 $\sin u$ 是递减的，所以 y 回落，在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处降至 $\sin 2 \approx 0.909$。

根据对称性，y 在 $x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 2.238$ 处再次升至 1，然后在 $x = \pi$ 处降至 0。用导数（derivative）验证，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cos x \cos(2\sin x),$$

它等于零，恰好是当 $\cos x = 0$（在 $\frac{\pi}{2}$ 处的局部极小值）或 $2\sin x = \pm\frac{\pi}{2}$（值为 1 的极大值）之时；在原点的斜率为 2。在 $[\pi, 2\pi]$ 上，图像是上述情况的反射：两个值为 -1 的极小值，中间在 $x = \frac{3\pi}{2}$ 处有一个值为 $-\sin 2$ 的局部极大值。正弦曲线的每一个峰都变成了带有浅浅凹陷的驼峰。



验算

- 取 $B = 0.3$ 和 $n = 1$：$A = \frac{5\pi}{2} - 0.3$ 给出 $\sin A = \cos 0.3 \approx 0.9553$，与预期相符。
- 在一个周期内用细密的格点计算 $\cos(\cos x) - \sin(\sin x)$，得到最小值约为 0.107（在 $x \approx 0.878$ 附近），从不为零，这印证了两条曲线并不相交。
- 对于 $\sin(2\sin x)$，在 $[0, \pi]$ 上作数值搜索，恰好找到三个转向点（turning points）：在 $x \approx 0.903$ 和 2.238 处的极大值 1，以及在 $\frac{\pi}{2}$ 处的极小值 $\sin 2 \approx 0.909$。

常见错误

- 只写出 $A = \frac{\pi}{2} - B + 2n\pi$，而遗漏了第二组解 $A = \frac{\pi}{2} + B + 2n\pi$，这组解来自 $\sin(\pi - C) = \sin C$。
- 忘记了 $n = 0$ 也是容许的，只检查 $|4n + 1| \geq 5$ 的情况：最关键的比较，正是与 $\frac{\pi}{2}$ 本身的比较。
- 把 $\sin(2\sin x)$ 画成一条高度为 1 的普通正弦曲线：由于 $2 > \frac{\pi}{2}$，内层自变量会越过正弦函数的顶峰，因而在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处出现凹陷。

STEP 之外

这里的草图全都关乎函数的复合（composition）：$f(g(x))$ 的形状取决于 g 的值域（range）覆盖了 f 的图像的哪一部分。把这个想法反复迭代（$\sin(\sin(\sin x))$，如此类推），便会引向不动点（fixed points）和迭代映射（iterated maps）的动力学，当中要问的是 $f(f(\cdots f(x)))$ 何时会稳定下来。至于那个不等式论证，即比较等式两边各自可能的取值范围，则是分析

学（analysis）中随处可见的一种技巧的简单例子；Abbott 的 *Understanding Analysis* 是了解如何把这类论证严格化的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。