详细解答

STEP II 2005，第 9 题

力学 · 斜面上的摩擦力

> **STEP II 2005，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q9

关键思路

把两个质点（particle）分开处理。A 没有受到外加的力，所以由它的方程便可确定绳子必须提供的张力（tension）。所有可供选择的余地，都在于 P 作用于 B 的方向。把 P 倾斜会改变 B 所受的法向反作用力（normal reaction），从而改变 B 所受的摩擦力（friction）。令 P 偏离斜面，会浪费它沿斜面方向的部分分量，却同时改变了摩擦力；最佳的倾斜角度正好令这两种效应取得平衡。最后问题归结为求形如 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 的式子的最大值。

解答

我们把 A 和 B 视为质点，并把绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible），且沿 ℓ 放置。我们取 P 作用于包含 ℓ 的铅垂平面内。P 横过斜面的分量毫无帮助。注意

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

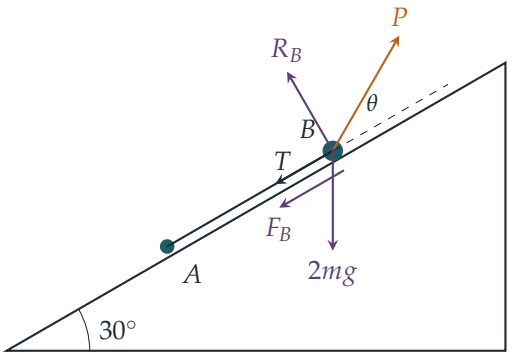
所以 $\mu_B = \tan 30^\circ$：若只有 B 本身，它恰好处于即将滑动的状态。另外 $\mu_A = \frac{1}{2}\tan 30^\circ$，所以若只有 A 本身，它会滑下。

质点 A。沿垂直于斜面的方向分解，得 $R_A = mg\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$，所以 A 所受的最大摩擦力为

$$\mu_A R_A = \tfrac{\sqrt{3}}{6}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}mg = \tfrac{1}{4}mg.$$

重量沿斜面向下的分量为 $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$。

质点 B。设 P 与 ℓ 向上的方向成角 θ，以离开斜面的一方为正。（θ 为负表示 P 把质点压向斜面。）设 T 为张力。



图中所示的摩擦力 F_B 沿斜面向下，即第 (i) 部分的情况。沿垂直于斜面的方向，

$$R_B + P\sin\theta = 2mg\cos 30^\circ \quad\Longrightarrow\quad R_B = \sqrt{3}\,mg - P\sin\theta.$$

所以 B 处可提供的最大摩擦力为

$$\mu_B R_B = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\,mg - P\sin\theta\right) = mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta.$$

B 的重量沿斜面向下的分量为 $2mg\sin 30^\circ = mg$。

第 (i) 部分

要令两个质点沿 ℓ 向上移动，每个质点所受的摩擦力都沿斜面向下。当 P 取最小值时，两者都处于即将移动的状态，所以两者所受的摩擦力都是极限摩擦力（limiting friction）。

要令 A 向上移动，绳子必须克服重量的分量和摩擦力：

$$T = \tfrac{1}{2}mg + \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{3}{4}mg.$$

对于 B，沿斜面方向，P 的分量必须克服 T、重量的分量和极限摩擦力：

$$P\cos\theta = \tfrac{3}{4}mg + mg + \left(mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right),$$

$$P\left(\cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) = \tfrac{11}{4}mg.$$

? **想一想** 把 P 倾斜离开斜面，明明会减少 P 沿斜面的分量，为甚么反而有帮助?

把 B 稍微向上提，会减少 R_B，从而减少 P 需要克服的摩擦力。当倾斜角 θ 很小时，$\cos\theta$ 只按 $1 - \frac{1}{2}\theta^2$ 的方式下降，而 $\sin\theta$ 则按 θ 的方式增长。所以起初是摩擦力减少所带来的好处占优。要求出最佳角度，可写成

$$\cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta - 30^\circ).$$

此式最大为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$，而等号恰好在 $\theta = 30^\circ$ 时成立。由于 P 乘以这个因子必须等于 $\frac{11}{4}mg$，所以当这个因子最大时 P 最小：

$$P_{\min} = \tfrac{11}{4}mg \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg,$$

这正是所要求的结果。我们必须检查 B 仍然留在斜面上：

$$R_B = \sqrt{3}\,mg - \tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{16}\sqrt{3}\,mg > 0.$$

所以 P 作用于通过 ℓ 的铅垂平面内，与 ℓ 成 30°，并偏向离开斜面的一方。换言之，它**与水平成** 60° **向上**，把质点沿斜面向上拉。（留意与斜面所成的最佳角度是 $\arctan \mu_B$，即 B 的摩擦角（angle of friction）。）

第 (ii) 部分

现在 P 只需阻止系统向下滑，所以每个质点所受的摩擦力都沿斜面向上。若没有 P，A 不能独自保持静止，因为它的重量分量 $\frac{1}{2}mg$ 大于最大摩擦力 $\frac{1}{4}mg$。所以绳子必须拉住 A：

$$T \geq \tfrac{1}{2}mg - \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{1}{4}mg.$$

特别地，绳子必须拉紧。要令 B 不向下滑，沿斜面向上的力必须足以平衡 T 和重量的分量：

$$P\cos\theta + \left(mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right) \geq T + mg.$$

左边与 T 无关，所以最小的 P 对应最小的张力 $T = \frac{1}{4}mg$。于是

$$P\left(\cos\theta - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) \geq \tfrac{1}{4}mg.$$

而 $\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta + 30^\circ) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$，等号在 $\theta = -30^\circ$ 时成立。这一次，最佳方向是把 B 压向斜面，这样会增大 R_B，从而增大有助稳住 B 的摩擦力。因此力的最小量值为

$$P_{\min} = \tfrac{1}{4}mg \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{8}\sqrt{3}\,mg.$$

它的方向在 ℓ 向上方向之下 30°。由于 ℓ 以 30° 向上倾斜，这个方向正是水平方向：即沿水平方向把 B 推向斜面。取这个值时，A 和 B 都处于极限平衡（limiting equilibrium），而 $T = \frac{1}{4}mg$。

验算

- 我们取 $m = g = 1$ 作数值检验。在铅垂平面内扫描 P 的每一个方向，并以二分法（bisection）求出每个方向所需的最小 P。在 (i) 中，最小值为 $2.3816 \approx \frac{11}{8}\sqrt{3}$，出现于与斜面成 30.0° 之处。在 (ii) 中，最小值为 $0.2165 \approx \frac{1}{8}\sqrt{3}$，出现于 -30.0°，即水平方向。我们亦确认了在 (ii) 的最小值处确实存在完整的平衡状态。

- 就 (i) 而言，当 P 沿斜面方向（$\theta = 0$）时，把各项加起来：所需的 $P = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mg + mg + mg = \frac{11}{4}mg \approx 2.75mg$。这比 $2.38mg$ 大，正如所料。
- 就 (ii) 而言，当 P 沿斜面方向时，系统需要 $\frac{3}{2}mg - \frac{1}{4}mg - mg = \frac{1}{4}mg$。水平推力的效果更佳，只需 $\frac{\sqrt{3}}{8}mg \approx 0.217mg$。

常见错误

- 假设 P 沿斜面方向作用。题目问的是最小的量值，所以方向可由你自行选择。
- 忘记 $P\sin\theta$ 会改变 R_B，因而改变 B 所受的极限摩擦力。
- 在 (ii) 中沿用 (i) 的摩擦力方向。当要防止的是向下滑动时，摩擦力沿斜面向上。

STEP 之外

两部分都建基于同一原理：对抗摩擦力时最有效率的力，与运动方向所成的角正是摩擦角 $\lambda = \arctan\mu$。在 (i) 中它偏离斜面，在 (ii) 中则偏向斜面。原因是法向反作用力与极限摩擦力可合成为单一个“总反作用力”（total reaction），它与法线成角 λ。以这个总反作用力来思考，许多摩擦力问题都可化为力三角形（triangle of forces）的几何问题。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以大学一年级的程度，仔细地处理了摩擦力和受约束运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。