详细解答

STEP II 2005，第 8 题

纯数学 · 可分离变量微分方程

> **STEP II 2005，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q8

关键思路

这条方程是可分离变量（separable）的：与 y 有关的部分只有 y^2 这一个因子，所以除以它之后便得到 $\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，也就是 $-1/y$ 的导数。对 x 的积分可用代换（substitution）$u = 1 + x^2$ 来处理，因为奇数次幂 x^3 正好提供了 u 所需要的 $x\,\mathrm{d}x$。至于第二条曲线，留意右边是 z^3 而不是 y^2：这时应该考虑的量是 $1/z^2$，而它原来与 $1/y$ 满足完全相同的方程。

解答

求 y

在 C 上有 $y(0) = 1 > 0$，而当 $x \geq 0$ 时方程的右边永不为负，所以 y 永不递减。因此 $y \geq 1$ 恒成立，我们可以除以 y^2：

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

计算积分时，设 $u = 1 + x^2$，于是 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$，而 $x^3\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(u-1)\,\mathrm{d}u$：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (u^{-3/2} - u^{-5/2})\,\mathrm{d}u = -u^{-1/2} + \tfrac{1}{3}u^{-3/2} + \text{常数} \\ &= -\frac{3u-1}{3u^{3/2}} + \text{常数} = -\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + \text{常数}.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{y} = \frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + k$$

其中 k 为某个常数。在 $x=0$ 处，上式变成 $1=\frac{2}{3}+k$，所以 $k=\frac{1}{3}$，这就是所要求的结果：

$$\frac{1}{y}=\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}}+\frac{1}{3}.$$

x 很大时

把主导的幂次提出来：从分子提出 $3x^2$，从 $(1+x^2)^{3/2}$ 提出 x^3：

$$\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}}=\frac{3x^2(1+\frac{2}{3x^2})}{3x^3(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}=\frac{1}{x}\Big(1+\frac{2}{3x^2}\Big)\Big(1-\frac{3}{2x^2}+\cdots\Big)=\frac{1}{x}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big),$$

这里用了二项展开（binomial expansion）；由于 $1/x^2<1$ 对很大的 x 成立，展开式有效。所以

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)=\frac{1}{3}\Big(1+\frac{3}{x}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big),$$

再取倒数，并利用 $(1+t)^{-1}=1-t+O(t^2)$，得

$$y=3\Big(1-\frac{3}{x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big)\approx 3-\frac{9}{x},$$

正如题目所求。

> ? **想一想** 为甚么可以舍去 $\frac{2}{3x^2}$ 和 $-\frac{3}{2x^2}$ 这两项，却不能舍去 $\frac{1}{x}$？

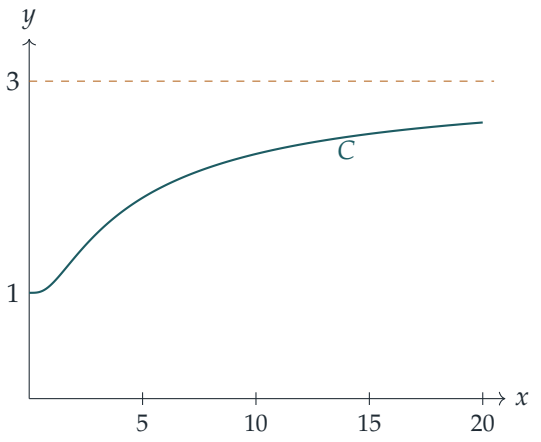
目标 $3-\frac{9}{x}$ 准确至 $\frac{1}{x}$ 阶。在 $1/y$ 中，各修正项比 $\frac{1}{x}$ 还要小一个 $\frac{1}{x^2}$ 的因子，所以它们只会在 $\frac{1}{x^2}$ 阶或更高阶影响 y。而 $\frac{1}{x}$ 这一项本身，正是产生 $-\frac{9}{x}$ 的来源。

C 的略图

现在把曲线的特征整理出来。

- $y(0)=1$,而且 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$ 于 $x=0$ 处成立。在原点附近 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x\approx x^3$,所以 $y\approx 1+\frac{1}{4}x^4$：曲线起初非常平坦。
- 当 $x>0$ 时斜率严格为正，所以 y 递增。
- $1/y$ 的第一项为正，所以 $1/y>\frac{1}{3}$，由此得 $1\le y<3$ 对所有 x 成立。曲线永不会趋向无穷大。
- 当 $x\to\infty$ 时，$y\to 3$ 从下方趋近，形如 $3-\frac{9}{x}$。这个趋近过程很慢：$y(10)\approx 2.31$。

由于曲线起初向上凹,其后渐趋平缓并靠近 $y=3$,它必定有一个拐点(point of inflection)。



z 的曲线

只要 $z \neq 0$，我们就可以除以 z^3。由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z^{-2}\right) = -2z^{-3}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2}{z^3}\cdot\frac{x^3z^3}{2(1+x^2)^{5/2}} = -\frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}},$$

这正是 $1/y$ 所满足的方程。在两条曲线上，$1/z^2 = 1$ 于 $x = 0$ 处成立，与 $1/y$ 的值相同。所以

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{y}, \qquad \text{即} \qquad z^2 = y.$$

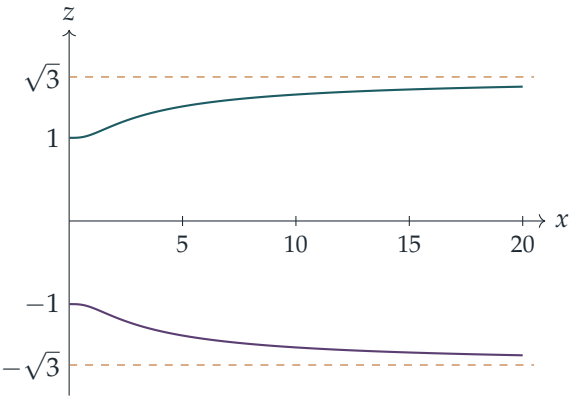
这同时确认了 z 永不会到达 0，从而说明刚才的除法是合理的。只要 $z \neq 0$，便有 $z^2 = y \geq 1$，所以 z 不可能接近 0。根据连续性，z 会一直保持起始时的正负号，于是两条曲线分别是

$$z = \sqrt{y} \quad (z(0) = 1), \qquad z = -\sqrt{y} \quad (z(0) = -1).$$

上方的曲线由 1 上升并趋向 $\sqrt{3}$，同样是起初很平坦（这次是 $z \approx 1 + \frac{1}{8}x^4$），而当 x 很大时

$$z = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{x} + \cdots\right)^{1/2} \approx \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2x}.$$

下方的曲线是它对 x 轴的反射：它由 -1 下降，趋向渐近线（asymptote）$z = -\sqrt{3}$。



想一想 为甚么 $z(0) = -1$ 的那条曲线，不只是把另一条曲线平移或作其他变换而得的复制品?

这条方程对 z 而言是奇的：把 z 换成 $-z$，两边都会乘上因子 -1。所以若 $z(x)$ 是解，则 $-z(x)$ 也是解，而由 -1 出发的解就是由 $+1$ 出发的解的反射。这与 $z = \pm\sqrt{y}$ 吻合。

验算

- 对答案求导：由 $1/y = u^{-1/2} - \frac{1}{3}u^{-3/2} + \frac{1}{3}$，可得 $\mathrm{d}(1/y)/\mathrm{d}x = 2x\left(-\frac{1}{2}u^{-3/2} + \frac{1}{2}u^{-5/2}\right) = -x^3u^{-5/2}$，正合所需。
- 以数值方法（龙格－库塔法，Runge–Kutta）解原方程，得 $y(1) = 1.08391$ 和 $y(5) = 1.89777$，与公式吻合至 10 位或以上有效数字。以数值方法解 z 的方程，得 $z(5) = \pm 1.37759 = \pm\sqrt{y(5)}$。
- 在 $x = 100$ 处，公式给出 $y = 2.9126$，而 $3 - \frac{9}{x} = 2.91$。两者相差约 $27/x^2$，与 $O(1/x^2)$ 的误差一致。

常见错误

- 漏掉负号：$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = -y^{-1}$。
- 断定 $y \to 3$ 的速度很快，理由是 $3 - \frac{9}{x}$“看来很接近”3。其实在 $x = 10$ 处，曲线仍只到达约 2.3。
- 两条曲线都写成 $z = \sqrt{y}$，或者没有解释为甚么 z 不能变号。

STEP 之外

两条方程都具有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)\,y^n$ 的形式，这是 伯努利方程（*Bernoulli equation*）的特殊情况；代换 $w = y^{1-n}$ 总能把这类方程化为线性方程。我们用的正是这个代换：$w = 1/y$ 和 $w = 1/z^2$。“方程相同，初值相同，所以函数相同”这一步，是一阶方程的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem，即 Picard–Lindelöf 定理）的一个例子。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）对两者都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。