详细解答

STEP II 2005，第 7 题

纯数学 · 向量与圆周运动

> **STEP II 2005，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q7

关键思路

每个位置向量（position vector）都具有 cos(角) $\mathbf{a}$ + sin(角) $\mathbf{b}$ 的形式；当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 互相垂直且长度相等时，它在 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 所在的平面上描出一个圆。一旦知道 $|OP|$ 和 $|OQ|$ 是常数，角 POQ 便可直接由纯量积（scalar product）求得，再用积化和差公式（product-to-sum formulae）把它整理成单一个余弦。最后一部分就变成在两个完整周期内关于一个余弦的不等式。

解答

第 (i) 部分

以 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 表示 P 和 Q 的位置向量。

对于 P，$\mathbf{p} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$，所以 $|\mathbf{p}| = 1$，而且 $\mathbf{p}$ 位于 xy 平面上。因此 P 在平面 $z = 0$ 上沿着以 O 为圆心、半径为 1 的圆运动；从上方（即从正 z 轴方向）看是逆时针方向，角速率（angular speed）恒为 1（所以速率为 1）。它由 $(1, 0, 0)$ 出发，当 t 由 0 变到 2π 时刚好转一圈。

对于 Q，设 $s = t + \frac{1}{4}\pi$，并设

$$\mathbf{a} = \tfrac{3}{2}\mathbf{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{j}, \qquad \text{于是} \qquad \mathbf{q} = \cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}.$$

现在 $|\mathbf{a}|^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9$，$|\mathbf{b}|^2 = 9$，且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$。因此

$$|\mathbf{q}|^2 = 9\cos^2 s + 9\sin^2 s + 2\cos s \sin s\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 9,$$

而且 $\mathbf{q}$ 始终位于通过 O、由 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{j}$ 张成的平面上。该平面包含 y 轴和方向 $\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{k}$，所以它的方程是 $z = \sqrt{3}\,x$；它的法线（normal）$-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$ 与 $\mathbf{k}$ 的夹角为 $\arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$。

所以 Q 在平面 $z = \sqrt{3}\,x$ 上沿着以 O 为圆心、半径为 3 的圆运动；这个平面包含 y 轴，并与 P 的圆所在的平面成 60° 倾角。它的角速率同样是 1（速率为 3），也是转一圈，由 $\mathbf{a}$ 的方向转向 $\mathbf{j}$，而它的相位（phase）始终比 P 的领先 $\frac{1}{4}\pi$：在 $t = 0$ 时，它位于与 $\mathbf{a}$ 成 $\frac{1}{4}\pi$ 角之处，即 $\frac{3}{2\sqrt{2}}(1,\, 2,\, \sqrt{3})$。

第 (ii) 部分

由于 $|\mathbf{p}| = 1$ 及 $|\mathbf{q}| = 3$，

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{3} = \frac{\frac{3}{2}\cos t\cos s + 3\sin t\sin s}{3} = \tfrac{1}{2}\cos t\cos s + \sin t\sin s,$$

其中 $s = t + \frac{1}{4}\pi$。利用积化和差公式，并注意 $t + s = 2t + \frac{1}{4}\pi$ 及 $s - t = \frac{1}{4}\pi$，可得

$$\cos t\cos s = \tfrac{1}{2}[\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) + \cos\tfrac{1}{4}\pi],$$
$$\sin t\sin s = \tfrac{1}{2}[\cos\tfrac{1}{4}\pi - \cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi)].$$

记 $C = \cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$，并利用 $\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \tfrac{1}{4}(C + \tfrac{\sqrt{2}}{2}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - C)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{8} + \tfrac{\sqrt{2}}{4} - \tfrac{1}{4}C = \tfrac{3\sqrt{2}}{8} - \tfrac{1}{4}\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi),\end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。

第 (iii) 部分

> **想一想** 怎样把 $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ 转化为关于 $\cos\theta$ 的条件?

余弦在 $[0, \pi]$ 上严格递减（strictly decreasing），而 θ 和 $\frac{1}{4}\pi$ 都在这个区间内，所以

$$\theta \geq \tfrac{1}{4}\pi \iff \cos\theta \leq \cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{4\sqrt{2}}{8}.$$

由第 (ii) 部分，这等价于

$$\tfrac{3\sqrt{2}}{8} - \tfrac{1}{4}\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) \leq \tfrac{4\sqrt{2}}{8} \iff \cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) \geq -\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

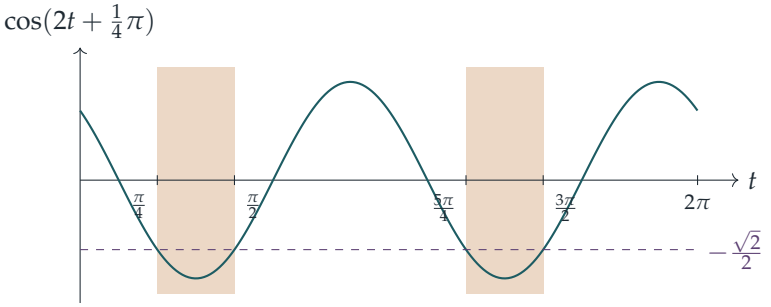
设 $u = 2t + \frac{1}{4}\pi$。当 t 取遍 $[0, 2\pi]$ 时，u 取遍 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi]$，这个区间的长度是 4π：刚好是 $\cos u$ 的两个周期。在任何一个周期内，$\cos u < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 恰好在一个长度为 $\frac{1}{2}\pi$ 的开区间上成立（即 $\frac{3}{4}\pi$ 与 $\frac{5}{4}\pi$ 之间，模 2π）。在这里，不符合条件的值是

$$u \in (\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi) \cup (\tfrac{11}{4}\pi, \tfrac{13}{4}\pi) \iff t \in (\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{3}{2}\pi),$$

以 t 计算，每段的长度为 $\frac{1}{4}\pi$。所以 $\theta < \frac{1}{4}\pi$ 的总时间是 $\frac{1}{2}\pi$，而 $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ 的总时间是

$$2\pi - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3}{2}\pi,$$

这正是所要证明的结果。



阴影部分是曲线降到 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 以下的地方，也就是 $\theta < \frac{1}{4}\pi$ 的地方。

验算

- 在 $t = 0$ 时：$\mathbf{p} = \mathbf{i}$ 及 $\mathbf{q} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k})$，所以直接计算得 $\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$。公式则给出 $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$。两者吻合。
- $\cos\theta$ 介乎 $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \approx 0.280$ 与 $\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.780$ 之间，所以 θ 永远不会是 0。这是合理的：$\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{q}$ 只可能沿着两个平面相交的 y 轴平行，但 P 在 $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ 时位于该轴上，而 Q 则在 $t = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ 时位于该轴上。
- 在 $[0, 2\pi]$ 内对 t 取二百万个样本点，并直接由向量计算 θ，得出 $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ 的总时间为 4.712389，与 $\frac{3}{2}\pi \approx 4.712389$ 相符。

常见错误

- 忘记除以 $|\mathbf{p}||\mathbf{q}| = 3$，或因为 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的系数不同而以为 $|\mathbf{q}|$ 会变化。
- 把不等号的方向弄反：$\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ 表示 $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$，因为余弦在 $[0, \pi]$ 上递减。
- 只计算了 $\cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$ 的一个周期：$2t$ 表示当 t 转一圈时，它转了两圈。

STEP 之外

任何以原点为圆心的圆都可以写成 $\cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$；如果去掉这些条件，便会得到一个椭圆（ellipse），而一般来说，得到的是单位圆在线性映射（linear map）下的像。以这种方式理解曲线，并用纯量积量度运动中的向量之间的夹角，正是大学一年级所学的线性代数（linear algebra）和向量微积分（vector calculus）的起点。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）把这些概念阐述得十分清晰。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。