详细解答

STEP II 2005，第 6 题

纯数学 · 二项式级数的和

STEP II 2005，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s2-q6

关键思路

这里每一个和都是某个幂级数（power series）在特定的 x 处的取值，所以要做的就是认出它来自哪一个函数。在第 (i) 部分，窍门是把 n 和 n^2 改写成 1、$n+1$ 和 $(n+1)(n+2)$ 的组合，而这些正是我们刚刚写下的系数。在第 (ii) 部分，只要留意到 $(1-x)^{-1/2}$ 和 $(1-x)^{-3/2}$ 的系数之间的关系，同样的想法就行得通。

解答

第 (i) 部分

根据负整数指数的二项式定理（binomial theorem）（当 $|x|<1$ 时成立），对于 $n \geq 0$，x^n 的系数（coefficient）为

$$(1-x)^{-1}: \quad 1, \qquad (1-x)^{-2}: \quad n+1, \qquad (1-x)^{-3}: \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

例如，$(1-x)^{-3}$ 中的系数是 $\dfrac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \dfrac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$。

第一个和。由于 $n=(n+1)-1$，当 $|x|<1$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

（把和拆开是可以的，因为右边两个级数都收敛（converge）。）$n=0$ 的一项为零，所以代入 $x=\frac{1}{2}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} = 4-2 = 2.$$

第二个和。我们想把 n^2 写成 $(n+1)(n+2)$、$n+1$ 和 1 的组合。由于 $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$，

$$n^2 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1.$$

因此，当 $|x|<1$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x},$$

其中出现因子 2，是因为 $(1-x)^{-3}$ 中的系数是 $(n+1)(n+2)$ 的一半。同样，$n=0$ 的一项为零，而在 $x=\frac{1}{2}$ 处

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n} = 2\cdot 8 - 3\cdot 4 + 2 = 6.$$

第 (ii) 部分

根据指数为 $-\frac{1}{2}$ 的二项式定理，$(1-x)^{-1/2}$ 中 x^n 的系数是

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\, n!}.$$

想一想 怎样把奇数的连乘积化成阶乘（factorial）？

把缺少的偶数补上：$(2n)! = (1\cdot 3\cdots(2n-1))(2\cdot 4\cdots 2n)$，而 $2\cdot 4\cdots 2n = 2^n n!$。所以 $1\cdot 3\cdots(2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$，而系数就是

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!\cdot 2^n n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}.$$

这对 $n=0$ 也成立（空积，$a_0=1$），所以当 $|x|<1$ 时

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{x^n}{2^{2n}},$$

正如所求。

第一个和。题目所求的和是 $\sum a_n x^n$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 处的值，而这一点位于展开式成立的区间之内。所以它等于

$$\left(1-\tfrac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

第二个和。现在我们需要 $\sum n a_n x^n$。按照第 (i) 部分的思路，把 na_n 与一个我们已知的级数联系起来。与上面完全一样，$(1-x)^{-3/2}$ 中 x^m 的系数是

$$b_m = \frac{3\cdot 5\cdots(2m+1)}{2^m\, m!} = (2m+1)\, a_m.$$

由 a_n 的公式，相邻两个系数之比是 $a_n/a_{n-1} = \dfrac{(2n)(2n-1)}{n^2 \cdot 4} = \dfrac{2n-1}{2n}$，所以对于 $n \geq 1$

$$n\,a_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)\,a_{n-1} = \tfrac{1}{2}\,b_{n-1}.$$

因此，当 $|x| < 1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-1} = \frac{x}{2}(1-x)^{-3/2}.$$

（等价的做法是：把 $(1-x)^{-1/2}$ 的级数逐项求导（differentiate term by term），这在它的收敛区间（interval of convergence）内是容许的，然后乘以 x。）在 $x = \frac{1}{3}$ 处：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n)!}{(n!)^2\,2^{2n}\,3^n} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

验算

- $\sum n2^{-n}$ 的首几项是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\cdots$，加到第四项已经是 1.625，并慢慢向 2 靠近；$\sum n^2 2^{-n}$ 加到 200 项的部分和（partial sum）与 6 吻合至小数点后很多个位。
- 数值上，$\sqrt{6}/2 \approx 1.224745$ 而 $\sqrt{6}/8 \approx 0.306186$；第 (ii) 部分两个级数的部分和与这两个值吻合至小数点后 12 个位。
- 对通项作一个简单的合理性检查：$n = 1$ 给出 $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，正是 $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$ 中那个熟悉的系数。

常见错误

- 忘记了 $(1-x)^{-3}$ 的系数中的 $\frac{1}{2}$，结果得出 $8-12+2=-2$ 作为 $\sum n^2 2^{-n}$ 的值，而正项之和不可能是负数。
- 把 $(1-x)^{-2}$ 的级数的系数写成 n 而不是 $n+1$：这个级数是 $1+2x+3x^2+\cdots$。
- 在最后一个和中，漏掉一个因子 x：$\sum n a_n x^{n-1}$ 是导数，但题目所求的和是 $\sum n a_n x^n$。

STEP 之外

这里用到的手法（把级数拆成几部分、逐项求导）之所以合理，是因为幂级数在其收敛半径（radius of convergence）之内绝对收敛（converges absolutely），并且可以在那里逐项求导。严谨地证明这一点，是大学第一门分析（analysis）课程的标准内容。系数 $\binom{2n}{n}/4^n$ 也会在概率中出现，它就是简单随机漫步（simple random walk）在走了 $2n$ 步之后回到

起点的概率。关于分析方面的内容，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。