详细解答

STEP II 2005，第 5 题

纯数学 · 内切圆与外接圆

STEP II 2005，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s2-q5

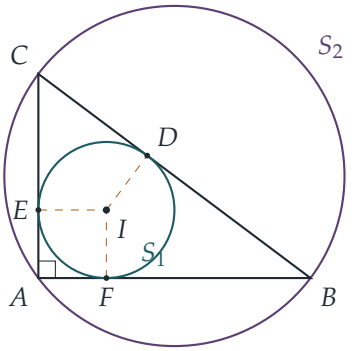
关键思路

由圆外一点向圆所作的两条切线（tangent）长度相等。把这个性质用于每个顶点，三角形的每条边便分成两段切线长，而在直角那个顶点，两段切线长刚好都是 r。这样几乎立刻就得到 r 的公式。至于面积比，直角告诉我们斜边（hypotenuse）是 S_2 的直径，而毕氏定理（Pythagoras′ theorem）让我们把一切只用 $b+c$ 和 a 表示，这就是 q 出现的原因。

解答

内切圆半径

设 S_1 的圆心为 I，并分别与 BC、CA、AB 相切于 D、E、F。



半径与切线互相垂直，所以 $IE \perp AC$ 及 $IF \perp AB$。连同 A 处的直角，可知 $AEIF$ 是长方形，而且它的一对邻边 $IE = IF = r$，所以它是正方形，并且

$$AE = AF = r.$$

由圆外一点所作的切线长度相等，所以 $BF = BD$ 及 $CE = CD$。因此

$$c = AF + FB = r + BD, \qquad b = AE + EC = r + CD, \qquad a = BD + DC.$$

把首两式相加，再减去第三式，

$$b + c - a = 2r + BD + CD - (BD + DC) = 2r,$$

这正是所需的结果。

面积比

由于 $\angle BAC = 90°$，根据半圆上的圆周角定理（angle in a semicircle theorem）的逆定理，BC 是外接圆（circumcircle）S_2 的直径。所以 S_2 的半径是 $\frac{1}{2}a$，面积是 $\frac{1}{4}\pi a^2$。

S_1 与三角形之间的区域，就是三角形除去 S_1 的圆盘后余下的部分，所以它的面积是 $\frac{1}{2}bc - \pi r^2$。因此

$$R = \frac{\frac{1}{2}bc - \pi r^2}{\frac{1}{4}\pi a^2}, \qquad \text{所以} \qquad \pi R = \frac{2bc - 4\pi r^2}{a^2} = \frac{2bc}{a^2} - \pi\,\frac{(b + c - a)^2}{a^2},$$

这里用了 $2r = b + c - a$。

想一想 怎样把 $2bc/a^2$ 化成只含 q 的式子?

由毕氏定理得 $b^2 + c^2 = a^2$，所以 $2bc = (b + c)^2 - (b^2 + c^2) = (b + c)^2 - a^2$。除以 a^2，

$$\frac{2bc}{a^2} = q^2 - 1, \qquad \frac{(b + c - a)^2}{a^2} = \left(\frac{b + c}{a} - 1\right)^2 = (q - 1)^2.$$

因此

$$\begin{aligned} \pi R &= q^2 - 1 - \pi(q^2 - 2q + 1) \\ &= -(\pi - 1)q^2 + 2\pi q - (\pi + 1), \end{aligned}$$

这就是所求的结果。

R 的上界

右边是 q 的二次式，首项系数 $-(\pi-1)$ 为负数，所以我们用配方法（completing the square）：

$$\begin{aligned}\pi R &= -(\pi-1)\left(q^2 - \frac{2\pi}{\pi-1}\,q\right) - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2}{\pi-1} - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2-(\pi^2-1)}{\pi-1}\\ &= \frac{1}{\pi-1} - (\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2.\end{aligned}$$

由于 $\pi-1>0$，平方项是被减去的，所以对任何实数 q 都有 $\pi R \le \dfrac{1}{\pi-1}$；再除以 $\pi>0$，

$$R \le \frac{1}{\pi(\pi-1)}.$$

这就是题目要求我们推导的结论。

值得留意的是，这个上界其实并不能达到。等号成立需要 $q=\pi/(\pi-1)\approx 1.467$，但对直角三角形而言，$(b+c)^2 = a^2+2bc \le a^2+(b^2+c^2) = 2a^2$（由算术平均—几何平均不等式（AM–GM），$2bc \le b^2+c^2$），所以 $q \le \sqrt{2} \approx 1.414$。$R$ 的最大可能值来自等腰三角形，即 $q=\sqrt{2}$，此时 $R = (2\sqrt{2}\,\pi - 3\pi + 1)/\pi \approx 0.1467$，仅略低于上界 $1/(\pi(\pi-1)) \approx 0.1486$。

验算

对于 3–4–5 三角形（$b=4$，$c=3$，$a=5$），公式给出 $r=1$；而面积 6 除以半周长（semi-perimeter）6 的确是 1，这正是标准公式 $r=$ 面积$/s$。于是 $R = (6-\pi)/(\frac{25}{4}\pi) \approx 0.14558$，而把 $q=1.4$ 代入二次式也得到相同的值。随机测试了 10^5 个直角三角形，每一次都验证了 πR 的恒等式，而且没有发现 R 超过 0.14674，与上界 0.14863 吻合。

常见错误

- 忘记 S_2 的半径是 $\frac{1}{2}a$ 而不是 a：斜边是直径。
- 试图直接展开 $2bc/a^2$，而没有利用 $b^2+c^2=a^2$ 把它写成 $2bc=(b+c)^2-a^2$。
- 没有检查 $q=\pi/(\pi-1)$ 是否可以取到，就声称上界可以达到；其实并不能达到，不过题目只要求证明不等式。

STEP 之外

一般三角形的内切圆（incircle）与外接圆，由欧拉（Euler）公式 $d^2 = R_2(R_2 - 2r)$ 联系起来，其中 d 是两圆圆心之间的距离，R_2 是外接圆半径（circumradius）；由此可得 $R_2 \geq 2r$，而等号只在等边三角形时成立。这类结果，以及在一族图形中求某个比值的最优值这种想法，都通往几何不等式（geometric inequalities）的研究。Coxeter 与 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《几何学的再探索》）是很优美的下一步读物，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》，免费，采用 CC BY 授权）则有更多 STEP 风格的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。