详细解答

STEP II 2005，第 4 题

纯数学 · 反正切恒等式

STEP II 2005，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s2-q4

关键思路

处理反正切（inverse tangent）之和，方法是对等式两边取正切，再运用 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$。条件 $bc=a^2+1$ 恰好令分母可以因式分解（factorise），并与分子约去。其后的问题就在于结构：第一个结果是一条把一个反正切拆开成两个的法则，而四项恒等式（identity）就是把这条法则用两次，在树的每一层各用一次。至于数值部分，则要倒推回去，找出是哪一种拆法产生了那四个数。

解答

第一个恒等式

设 $A=\arctan\frac{1}{a+b}$ 及 $B=\arctan\frac{1}{a+c}$。由于 $a,b,c>0$，$\frac{1}{a+b}$ 与 $\frac{1}{a+c}$ 均为正数，所以 $A,B\in(0,\frac{\pi}{2})$，而 $A+B\in(0,\pi)$。利用 $bc=a^2+1$，

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)-1&=a^2+ab+ac+bc-1\\&=2a^2+ab+ac=a(2a+b+c).\end{aligned}$$

因此，根据复角公式（addition formula），

$$\begin{aligned}\tan(A+B)&=\frac{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}}{1-\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}}=\frac{(a+c)+(a+b)}{(a+b)(a+c)-1}\\&=\frac{2a+b+c}{a(2a+b+c)}=\frac{1}{a},\end{aligned}$$

其中因为 $2a+b+c>0$，所以可以约去。

想一想 由 $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$ 真的可以得出 $A+B=\arctan\frac{1}{a}$ 吗?

不是必然的: tan 的周期(period)为 π, 所以我们需要 $A+B$ 位于 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 之内, 即 arctan 的值域 (range)。我们已知 $A+B\in(0,\pi)$。此外 $(a+b)(a+c)-1=a(2a+b+c)>0$, 所以 $\tan A\tan B<1$, 复角公式中的分母为正数; 加上分子为正数, 便得 $\tan(A+B)>0$, 这就排除了 $A+B\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ 的可能。(事实上, $\tan(A+B)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处无定义, 而在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上为负数。) 所以 $A+B\in(0,\frac{\pi}{2})$, 而 $\arctan\frac{1}{a}$ 是该区间内唯一一个正切值为 $\frac{1}{a}$ 的角, 故

$$\arctan\frac{1}{a+b}+\arctan\frac{1}{a+c}=\arctan\frac{1}{a}. \qquad \blacksquare$$

四项恒等式

把第一个恒等式应用三次; 每次所涉及的三个数均为正数。

- 取 $a=p+q$、$b=s$、$c=t$: 条件为 $st=(p+q)^2+1$, 这是已知的, 所以

$$\arctan\frac{1}{p+q+s}+\arctan\frac{1}{p+q+t}=\arctan\frac{1}{p+q}.$$

- 取 $a=p+r$、$b=u$、$c=v$: 条件 $uv=(p+r)^2+1$ 是已知的, 所以

$$\arctan\frac{1}{p+r+u}+\arctan\frac{1}{p+r+v}=\arctan\frac{1}{p+r}.$$

- 取 $a=p$、$b=q$、$c=r$: 条件 $qr=p^2+1$ 是已知的, 所以

$$\arctan\frac{1}{p+q}+\arctan\frac{1}{p+r}=\arctan\frac{1}{p}.$$

把首两式相加, 再利用第三式, 可知四个反正切之和为 $\arctan\frac{1}{p}$, 正是所求。$\blacksquare$

数值恒等式

我们需要 $p=7$, 所以 $qr=50$。与其猜测 q 和 r, 不如由那四个数倒推回去。若 13 和 21 是某次使用第一个恒等式时的一对 $a+b$、$a+c$, 则 $b=13-a$、$c=21-a$, 而 $bc=a^2+1$ 给出

$$(13-a)(21-a)=a^2+1 \iff 273-34a=1 \iff a=8.$$

同样地, 若 82 和 187 是一对, 则

$$(82-a)(187-a)=a^2+1 \iff 15334-269a=1 \iff a=57.$$

于是尝试取 $p+q=8$ 及 $p+r=57$, 即 $q=1$、$r=50$; 然后 $s=13-8=5$、$t=21-8=13$、$u=82-57=25$、$v=187-57=130$。七个数全为正数, 而三个条

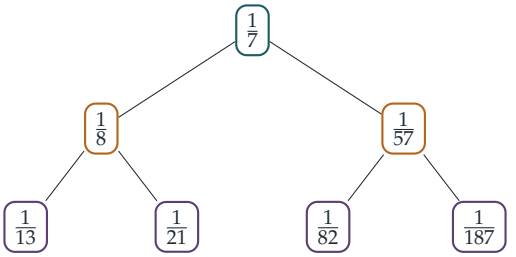
件均成立：

$$qr = 50 = 7^2 + 1, \qquad st = 65 = 8^2 + 1, \qquad uv = 3250 = 57^2 + 1.$$

取这些值时，$p+q+s = 13$、$p+q+t = 21$、$p+r+u = 82$ 及 $p+r+v = 187$，所以由四项恒等式可得

$$\arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{82} + \arctan\frac{1}{187} = \arctan\frac{1}{7}. \qquad \blacksquare$$

下面的树显示 $\arctan\frac{1}{7}$ 如何拆开。



每个节点的反正切都等于其子节点的反正切之和：$1 \cdot 50 = 7^2 + 1$，$5 \cdot 13 = 8^2 + 1$，$25 \cdot 130 = 57^2 + 1$。

验算

- 以数值计算，最后那个恒等式的两边均为 0.1418970546…。
- 以分数作精确计算：对于 $\frac{1}{13}, \frac{1}{21}$，$\tan(A+B)$ 为 $\frac{34}{272} = \frac{1}{8}$；对于 $\frac{1}{82}, \frac{1}{187}$，其值为 $\frac{269}{15333} = \frac{1}{57}$；而对于 $\frac{1}{8}, \frac{1}{57}$，其值为 $\frac{65}{455} = \frac{1}{7}$。
- 第一个恒等式的一个特殊情况：取 $a = 1$、$b = 1$、$c = 2$，便得著名的 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$。

常见错误

- 由 $\tan(A+B) = \frac{1}{a}$ 直接断定 $A + B = \arctan\frac{1}{a}$，而没有检查 $A+B$ 是否位于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之内。
- 盲目地逐一尝试 50、65 和 3250 的各种因数分解；其实由 13, 21 这一对倒推回去，一行便可求得 $a = 8$。

STEP 之外

这类恒等式正是梅钦类公式（Machin-type formulae）背后的原理，例如 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$；数百年来，人们一直用这些公式以人手计算 π，因为当 x 很小时，$\arctan x$ 的级数（series）收敛（converge）得很快。要看清这些恒等式，最简洁的途径是通过复数（complex numbers）：$\arctan\frac{1}{n}$ 是 $n + \mathrm{i}$ 的辐角（argument），所以反正切相加就对应于高斯整数（Gaussian integers）相乘，而条件 $bc = a^2 + 1$ 其实是 $a^2 + 1 = (a + \mathrm{i})(a - \mathrm{i})$ 的一个因式分解，只是换了个模样。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 深入阐述了这种从几何角度看乘法的观点，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 则讨论了二平方和（sums of two squares）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。