详细解答

STEP II 2005，第 3 题

纯数学 · 分部积分法

STEP II 2005，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s2-q3

关键思路

先求导：$\sin x - x\cos x$ 的导数（derivative）会化简成一个正负号一目了然的式子，草图和 y 的上下界便一并得出。两个积分都是常规的分部积分法（integration by parts），平方项则借助二倍角公式（double-angle formulae）处理。最后的不等式来自两者的比较：介乎 0 与 1 之间的数，不会小于它自己的平方。

解答

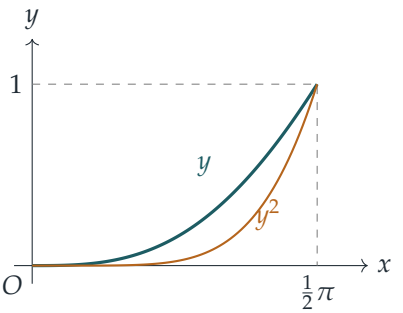
草图与上下界

用积法则（product rule）求导，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

当 $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$ 时，x 和 $\sin x$ 均为正数，所以 y 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上严格递增（strictly increasing）。因此它的最小值是 $y(0) = 0 - 0 = 0$，最大值是 $y(\frac{1}{2}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\pi \cdot 0 = 1$。故此 $0 \leq y \leq 1$，而且事实上当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时有 $0 < y < 1$。

至于曲线的形状，在 $(0, \frac{1}{2}\pi]$ 上 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \sin x + x\cos x > 0$，所以整条曲线都向上弯。在原点处斜率（gradient）为 0。利用马克劳林级数（Maclaurin series），$y = (x - \frac{1}{6}x^3) - x(1 - \frac{1}{2}x^2) + \cdots = \frac{1}{3}x^3 + \cdots$，所以曲线离开原点时非常平坦，形状像三次曲线。在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 处斜率为 $\frac{1}{2}\pi$。



图中也画出了琥珀色的曲线 y^2，因为它是最后一部分的关键。

第 (i) 部分

我们需要求 $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$。取 $u=x$、$\mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x$ 作分部积分，

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x=\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\pi-1.$$

由于 $\int_0^{\pi/2}\sin x\,\mathrm{d}x=1$，

$$\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x=1-(\tfrac{1}{2}\pi-1)=2-\frac{\pi}{2},$$

正是所求。

第 (ii) 部分

展开，

$$y^2=\sin^2 x-2x\sin x\cos x+x^2\cos^2 x=\sin^2 x-x\sin 2x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x^2\cos 2x,$$

其中用到 $2\sin x\cos x=\sin 2x$ 和 $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$。我们逐一处理这四项。

第一，$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，而 $\sin 2x$ 在上下限处均为零，所以

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\Big[\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

其次，取 $u=x$、$\mathrm{d}v=\sin 2x\,\mathrm{d}x$ 作分部积分，并利用 $\cos\pi=-1$，

$$\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,\mathrm{d}x=\Big[-\tfrac{1}{2}x\cos 2x\Big]_0^{\pi/2}+\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}.$$

第三，$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(\frac{1}{2}\pi)^3=\dfrac{\pi^3}{48}$。

最后，取 $u = x^2$、$\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$ 作分部积分；边界项 $[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x]_0^{\pi/2}$ 为零，而余下的积分正是刚才求得的那一个：

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x = 0 - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4},$$

所以最后一项的贡献是 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{8}\pi$。

把四项相加，

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

正是所求。

推论

想一想 两个积分怎样能够得出一个关于 π 的不等式?

比较两个被积函数(integrand)。由于 $0 \le y \le 1$,在整个区间上都有 $y - y^2 = y(1-y) \ge 0$。更进一步，我们已证明当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时 $0 < y < 1$，所以在该处 $y(1-y) > 0$。一个非负的连续函数（continuous function），若在某个开区间上严格为正，它的积分必定严格为正。因此

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x, \qquad \text{即} \qquad \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2}.$$

两边乘以 48（它是正数，所以不等号方向不变），

$$\pi^3 - 6\pi < 96 - 24\pi, \qquad \text{所以} \qquad \pi^3 + 18\pi < 96.$$

这就是所要求的结果。

验算

- 以数值计算，$2 - \frac{1}{2}\pi \approx 0.4292$，而 $\frac{1}{48}\pi^3 - \frac{1}{8}\pi \approx 0.2533$；对原来的被积函数使用辛普森法则（Simpson's rule），所得数值准确至小数点后十二位都相同。两者都介乎 0 与 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ 之间，这是必然的，因为 $0 \le y \le 1$。
- 第二个积分比第一个小，正如图中 y^2 位于 y 之下所显示的那样。
- 取 $\pi \approx 3.1416$，$\pi^3 + 18\pi \approx 31.006 + 56.549 = 87.55$，远低于 96。

常见错误

- 在 $\int x \sin 2x\,\mathrm{d}x$ 中弄错边界项的正负号：在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 处，$\cos 2x = \cos \pi = -1$，所以 $-\frac{1}{2}x\cos 2x$ 等于 $+\frac{1}{4}\pi$。

- 在最后一步只得出 $\leq$。要得到严格不等式，需要 $y(1-y) > 0$ 在某处成立，而不仅是 ≥ 0。
- 忘记说明为何 $y \leq 1$：只知道 $y(\frac{1}{2}\pi) = 1$ 并不足够，还须用到 y 递增这一事实。

STEP 之外

最后一步是一个重要想法的小小例子：函数之间的不等式，经积分后会变成数与数之间的不等式，而只要巧妙地选取函数，便可以把 π 这类常数困在某个范围之内。同样的策略可以由 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > 0$ 得出 $\frac{22}{7} > \pi$ 这个著名的证明，而更有分量的例子，是尼云（Niven）对 π 是无理数（irrational）的证明。在大学第一门分析课程中，你会严格地证明：一个非负的连续函数，若在某处为正，它的积分必为正。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是一本平易近人的书，可以看到这个证明怎样严谨地完成。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。