详细解答

STEP II 2005，第 12 题

概率与统计 • 贝叶斯定理

STEP II 2005，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s2-q12

关键思路

这是以公平硬币作为先验（prior）的贝叶斯定理（Bayes' theorem）。由于硬币是公平的，在已知回答的条件下，掷出正面的概率为 $\frac{1}{2}$，当且仅当无论硬币掷出正面还是反面，得到这些回答的可能性都相等。因此在每一部分，我们只需比较两个似然（likelihood）$\mathrm{P}(\text{回答} \mid H)$ 和 $\mathrm{P}(\text{回答} \mid T)$，并以哪一位孪生姊妹在线作为条件来计算它们。

解答

设 H 和 T 分别为硬币掷出正面和反面的事件，故 $\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T) = \frac{1}{2}$。设 A 为 Anna 在线的事件，B 为 Bella 在线的事件，其中 $\mathrm{P}(A) = p$，$\mathrm{P}(B) = q = 1 - p$。谁在线与硬币毫无关系，所以 A 和 B 均与 H 独立（independent）。在第 (ii) 和第 (iii) 部分，我们假设硬币只掷一次，而两封电子邮件都由同一位孪生姊妹回复，即我们发信时在线的那一位。（另一种理解方式见文末的备注。）

记 $t = ap + bq$，即单独一个回答属实的整体概率。

对于任何一组回答纪录 E，由贝叶斯定理及 $\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T)$ 可得

$$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H)}{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid T)} = \frac{\mathrm{P}(E \mid H)}{\mathrm{P}(E \mid H) + \mathrm{P}(E \mid T)}.$$

此式等于 $\frac{1}{2}$，当且仅当 $\mathrm{P}(E \mid H) = \mathrm{P}(E \mid T)$。单凭这一点观察，便已完成了大部分工作。

第 (i) 部分

设 Y 为回答是“是”的事件。若硬币掷出正面，“是”便是真话。以谁在线作为条件，

$$\mathrm{P}(Y \mid H) = pa + qb = t.$$

若硬币掷出反面，“是”便是谎话，故

$$\mathrm{P}(Y \mid T) = p(1-a) + q(1-b) = (p+q) - (ap+bq) = 1 - t.$$

因此

$$\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{t}{t + (1-t)} = t = ap + bq.$$

所以 $\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{1}{2}$ 当且仅当 $ap + bq = \frac{1}{2}$，亦即当且仅当 $2(ap+bq) = 1$，正如所求。

第 (ii) 部分

设 E 为先答“是”、后答“否”的事件。假设 Anna 在线。她的两个回答互相独立，而且无论硬币掷出哪一面，两个回答中都恰好有一个是真话：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \mid H \cap A) &= a(1-a) && \text{（如实答“是”，然后说谎），} \\ \mathrm{P}(E \mid T \cap A) &= (1-a)a && \text{（说谎，然后如实答“否”）．} \end{aligned}$$

两者相等。同理，$\mathrm{P}(E \mid H \cap B) = b(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T \cap B)$。因此

$$\mathrm{P}(E \mid H) = pa(1-a) + qb(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T),$$

再由上面的观察可知 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$，不论 p、a 和 b 取何值。

> ? **想一想** 为甚么这里完全不需要任何条件，就恰好得到 $\frac{1}{2}$?

回答互相矛盾，意味着无论硬币掷出哪一面，这位孪生姊妹都是说了一次真话、说了一次谎话。这个组合在正面和反面的情况下出现的可能性相等，所以它不带有任何关于硬币的信息，我们得到的仍然是先验概率 $\frac{1}{2}$。

第 (iii) 部分

现在设 E 为两次都答“是”的事件。已知掷出正面时，两个回答都是真话；已知掷出反面时，两个回答都是谎话。以谁在线作为条件，

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \mid H) &= pa^2 + qb^2, \\ \mathrm{P}(E \mid T) &= p(1-a)^2 + q(1-b)^2. \end{aligned}$$

两式相减，并利用 $(1-a)^2 = 1-2a+a^2$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \mid H) - \mathrm{P}(E \mid T) &= p(a^2 - (1-a)^2) + q(b^2 - (1-b)^2) \\ &= p(2a-1) + q(2b-1) \\ &= 2(ap+bq) - (p+q) \\ &= 2(ap+bq) - 1.\end{aligned}$$

所以若 $2(ap+bq) = 1$，两个似然便相等，而 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$，正如所求。

（事实上，这个计算所显示的不止于此：两个似然之差恰好是 $2(ap+bq)-1$，所以 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$ 成立当且仅当 $2(ap+bq) = 1$，与第 (i) 部分的条件相同。）

备注：另一种理解方式

如果改为每封电子邮件都重新、独立地决定是哪一位孪生姊妹刚好在线，那么每个回答属实的概率都是 t，而且互相独立。这样，在 (ii) 中 $\mathrm{P}(E \mid H) = t(1-t) = \mathrm{P}(E \mid T)$，而在 (iii) 中 $\mathrm{P}(E \mid H) = t^2$ 及 $\mathrm{P}(E \mid T) = (1-t)^2$，两者在 $t = \frac{1}{2}$ 时相等。结论并无分别。

验算

- 若两位孪生姊妹永远说真话（$a = b = 1$），则 $t = 1 \neq \frac{1}{2}$，而在 (i) 中，一个“是”的回答令正面成为必然：$\mathrm{P}(H \mid Y) = t = 1$。这时 (ii) 中互相矛盾的回答不可能出现，这与 $a(1-a) = b(1-b) = 0$ 一致。
- 取 $p = 0.3$、$a = 0.8$ 及 $b = \frac{0.5-0.24}{0.7} \approx 0.371$（故 $2(ap+bq) = 1$），在同一位孪生姊妹回复的模型中模拟 2×10^5 轮，得出 $\mathrm{P}(H \mid \text{是、是}) \approx 0.496$。以分数对数千组随机的 (p, a, b) 作精确枚举，确认了全部三个结果在两种理解方式下均成立。
- 若 $p = \frac{1}{2}$ 及 $a = b = 0.9$，条件不成立，而两个“是”的回答给出 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{81}{82}$，与 $\frac{1}{2}$ 相去甚远，可见 (iii) 中的条件确实重要。

常见错误

- 未加说明便写下 $\mathrm{P}(Y \mid T) = 1 - \mathrm{P}(Y \mid H)$。此式在这里碰巧成立，但那只是因为在反面的情况下答“是”属于说谎；作答时应说明这一点。
- 在 (iii) 中，把两个回答当作各自以概率 t 属实的独立回答，同时却又假设两个回答出自同一位孪生姊妹。在已知是哪一位孪生姊妹的条件下，两个回答是独立的，但在无条件的情况下并不独立，因为两者都取决于谁在线。

STEP 之外

这里贯穿始终的原理只有一个：后验（posterior）赔率（odds）等于先验赔率乘以似然比（likelihood ratio）；在两个假设下出现的可能性相等的证据，不会告诉你任何事情。同一位孪生姊妹回复的模型是一个简单的混合模型（*mixture*）：在已知某个隐变量（hidden variable, 即谁在线）的条件下, 各个回答互相独立, 但整体而言却是相依的, 这个想法正是隐变量模型和贝叶斯模型的核心。Blitzstein 与 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率论入门）正是以这种精神，对条件概率和贝叶斯法则作了十分出色的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。