详细解答

STEP II 2005，第 11 题

力学 · 斜面上的摩擦力

STEP II 2005，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

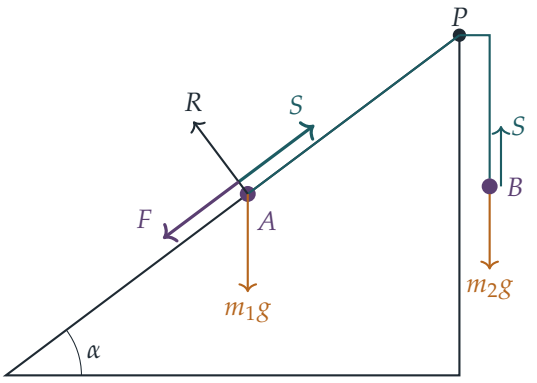
step.maths.org/questions/05-s2-q11

关键思路

由于 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$，我们得到一个 3–4–5 三角形，所以 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ 及 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$，而作用于 A 的每一个力都成为 $m_1 g$ 的简洁倍数。A 的运动于是分成三个阶段，每个阶段的加速度（acceleration）都是常数：被绳子拉上斜面、自由地向上滑行，以及向下滑回。摩擦力（friction）的方向在最后两个阶段之间改变，而这正是本题暗藏玄机的地方。

解答

我们把 A 和 B 视为质点（particle），绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible），滑轮（pulley）视为光滑，因此两边的张力（tension）S 相同。设 $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$，使得 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ 及 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$。



绳子拉紧时的加速度

在垂直于斜面的方向上，A 没有加速度，所以

$$R = m_1 g\cos\alpha = \tfrac{4}{5}m_1 g, \qquad \text{而极限摩擦力（limiting friction）为} \qquad \mu R = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{5}m_1 g = \tfrac{2}{5}m_1 g.$$

首先我们检查系统确实会运动。假如 B 下降，A 便会沿斜面向上移动，阻碍它的是其重量的分量 $\frac{3}{5}m_1 g$ 以及最多为 $\frac{2}{5}m_1 g$ 的摩擦力：合共最多为 $m_1 g$。向另一方拉动的是 B 的重量 $m_2 g$，而 $m_2 > m_1$，所以摩擦力无法令系统保持静止：B 下降，A 沿斜面向上移动，而作用于 A 的摩擦力达到极限值，方向沿斜面向下。

设 a 为两者共同的加速度。对 A（沿斜面向上）和对 B（向下）应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} m_1 a &= S - \tfrac{3}{5}m_1 g - \tfrac{2}{5}m_1 g = S - m_1 g, \\ m_2 a &= m_2 g - S. \end{aligned}$$

两式相加，$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$，所以

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g,$$

正如所求。为方便起见，我们写成 $a = kg$，其中 $k = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$ 且 $0 < k < 1$。

到达最高点的时间

在时间 T，A 正以速率 $u = aT = kgT$ 沿斜面向上移动，并已走了 $\frac{1}{2}kgT^2$ 的距离。

绳子断开时，S 消失。A 仍在沿斜面向上移动，所以摩擦力仍然沿斜面向下，而沿斜面向下的力合共为 $\frac{3}{5}m_1 g + \frac{2}{5}m_1 g = m_1 g$。因此 A 的减速度恰好是 g，并在再过一段时间

$$\frac{u}{g} = kT.$$

之后静止下来。故此 A 在释放后的时间

$$T + kT = (1+k)T = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, T$$

到达最高点。（题目告诉我们 A 永远不会到达滑轮，所以这个阶段不会被提早中断。）在这个阶段中，A 再走了 $\dfrac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}k^2 gT^2$，所以它由释放点起沿斜面向上所走的总距离为

$$d = \tfrac{1}{2}kgT^2 + \tfrac{1}{2}k^2 gT^2 = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2.$$

? **想一想** A 停下来之后，会留在原处吗?

只有当摩擦力足以支撑它时，它才会留在原处。重量沿斜面向下的分量是 $\frac{3}{5}m_1g$，而摩擦力最多只能提供 $\frac{2}{5}m_1g$。换句话说，$\tan\alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \mu$。所以 A 会向下滑回，而这时摩擦力沿斜面向上。沿斜面向下的净力为 $\frac{3}{5}m_1g - \frac{2}{5}m_1g = \frac{1}{5}m_1g$，所以 A 以 $\frac{1}{5}g$ 的加速度沿斜面向下加速，比它上行时的减速度缓和得多。

质量之比

A 由最高点从静止出发，需时 t_d 滑回距离 d 而返抵释放点，其中

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}g\,t_d^2 = d = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2, \qquad \text{所以} \qquad t_d^2 = 5k(1+k)T^2.$$

题目告诉我们 t_d 等于到达最高点的时间 $(1+k)T$。两边平方，这表示

$$(1+k)^2T^2 = 5k(1+k)T^2.$$

两边除以正数 $(1+k)T^2$，得 $1+k=5k$，所以 $k=\frac{1}{4}$。留意 T 已经消去：这就是为何无论绳子何时断开，这个等式都成立，而它亦唯一地确定了 k 的值。于是

$$\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1} = \frac{1}{4} \iff 4m_2-4m_1 = m_2+m_1 \iff 3m_2 = 5m_1,$$

所以

$$m_1 : m_2 = 3 : 5.$$

验算

- 极限情况：若 $m_2 \to m_1$，则 $k\to 0$，而到达最高点的时间趋向 T（几乎没有速率可以失去）；若 $m_2 \gg m_1$，则 $k\to 1$，而 A 靠惯性滑行的时间与它被拉动的时间一样长，这正如我们所料，因为它达到速率 gT 后以 g 减速。
- 取 $m_1=3$、$m_2=5$ 及 $T=1\,\text{s}$，我们有 $k=\frac{1}{4}$；到达最高点的时间是 $1.25\,\text{s}$，$d=\frac{5}{32}g$，而下滑需时 $\sqrt{2d/(g/5)} = \sqrt{25/16} = 1.25\,\text{s}$。对全部三个阶段逐步进行数值模拟，在多个 T 值之下，两个时间都得出 $1.250\,\text{s}$。

常见错误

- 忘记了 A 开始滑回时摩擦力会反向，因而以 g（或 $\frac{3}{5}g$）而非 $\frac{1}{5}g$ 作为下滑的加速度。
- 只由绳子断开的位置起计算下滑的距离，而不是由释放点起计算。
- 没有检查 A 是否真的会滑回：这需要 $\tan\alpha > \mu$。

STEP 之外

摩擦力是取决于运动状态的力的经典例子：它的方向随速度而转换，而当物体静止时，它的大小有一个上限。这使得运动成为分段的，每个阶段各有不同的运动方程（equation of motion），而同一个想法亦支配着黏滑（stick–slip）现象，例如吱吱作响的门铰和地震断层。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以大学一年级物理所要求的严谨程度，处理摩擦力和受约束的运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。