详细解答

STEP II 2005，第 10 题

力学 • 相撞的抛体

STEP II 2005，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s2-q10

关键思路

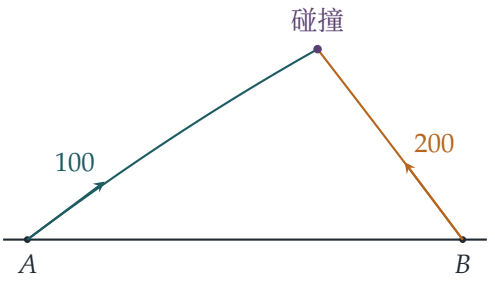
两枚导弹都是抛体（projectile），所以我们可以写出每一枚在任何时刻的位置。碰撞（collision）的意思是两者在同一瞬间位置相同，由此得到两条方程（水平和垂直方向各一），含两个未知数：碰撞时间和 T。水平方向的方程是线性的，可以用来消去碰撞时间，垂直方向的方程随之变成 T 的二次方程（quadratic）。之后我们要判断哪一个根在物理上合理。

解答

建立模型

我们把两枚导弹都视为质点（particle），只受重力作用而自由运动，不计空气阻力。取 A 为原点，x 轴沿 AB 方向（所以 B 位于 $x = 180$），y 轴垂直向上。时间 t 以秒为单位，由第一枚导弹发射的一刻起计。

对第一枚导弹，由 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ 得 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$，所以它的初速度分量是 $100 \cdot \frac{4}{5} = 80$ 和 $100 \cdot \frac{3}{5} = 60$。对第二枚导弹，由 $\sin\beta = \frac{4}{5}$ 得 $\cos\beta = \frac{3}{5}$。它朝着 A 飞行，所以它的分量是 $-200 \cdot \frac{3}{5} = -120$ 和 $200 \cdot \frac{4}{5} = 160$。



设 $s = t - T$ 为第二枚导弹发射后所经过的时间。那么，当两者都在飞行时，

$$\begin{aligned} &\text{第一枚导弹：} \quad x = 80t, && y = 60t - 5t^2, \\ &\text{第二枚导弹：} \quad x = 180 - 120s, && y = 160s - 5s^2. \end{aligned}$$

碰撞

碰撞时两者的 x 坐标相同：

$$80t = 180 - 120(t - T) \quad \Longrightarrow \quad 200t = 180 + 120T \quad \Longrightarrow \quad t = 0.9 + 0.6T,$$

因此 $s = t - T = 0.9 - 0.4T$。

y 坐标亦相同：$60t - 5t^2 = 160s - 5s^2$，即

$$60t - 160s = 5(t^2 - s^2) = 5(t - s)(t + s) = 5T(t + s),$$

这里用了 $t - s = T$。代入 t 和 s 的表达式：

$$\begin{aligned} 60t - 160s &= 60(0.9 + 0.6T) - 160(0.9 - 0.4T) = 100T - 90, \\ 5T(t + s) &= 5T(1.8 + 0.2T) = 9T + T^2. \end{aligned}$$

令两式相等，

$$T^2 - 91T + 90 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (T - 1)(T - 90) = 0,$$

所以 $T = 1$ 或 $T = 90$。

? **想一想** 两个根都满足方程。为甚么 $T = 90$ 不可能是答案?

当 $T = 90$ 时，我们得到 $s = 0.9 - 36 = -35.1$，即是说这次“碰撞”会在第二枚导弹发射之前 35.1 秒发生。（碰撞点亦远低于地面：这些方程所描述的，是延伸至实际飞行范围以外的抛物线。）所以这个根没有物理意义。况且第一枚导弹只在空中停留 $2 \cdot 60/10 = 12$ 秒，早就已经落地了。

当 $T = 1$ 时，我们得到 $t = 1.5$ 和 $s = 0.5 > 0$，所以两枚导弹都在飞行中。高度分别是 $60(1.5) - 5(1.5)^2 = 78.75$ 和 $160(0.5) - 5(0.5)^2 = 78.75$，两者皆为正数，而且两枚导弹

都位于 $x = 120$。因此

$$T = 1 \text{ 秒}.$$

验算

把 $T = 1$ 代回去：在 $t = 1.5\,\text{s}$ 时，两枚导弹都位于 $(120, 78.75)$ 米，这一点我们已用精确分数核实。以发射延迟 $1\,\text{s}$ 用数值方法逐步计算两者的运动，两枚导弹之间的距离在 $t = 1.5\,\text{s}$ 时降至几乎为零。再作一个合理性检查：碰撞发生在 $x = 120$，介乎 A 与 B 之间，而第一枚导弹仍在上升，因为它在该处的垂直速度是 $60 - 15 = 45\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$。

常见错误

- 两枚导弹用了同一个时间变量。第二枚导弹的飞行时间是 $t - T$，而不是 t。
- 忘记第二枚导弹是沿 x 轴的负方向运动。
- 保留 $T = 90$，而没有检查是否 $t - T > 0$。

STEP 之外

这个问题有一个更巧妙的看法。两枚导弹的加速度同为 g，所以一旦两者都在飞行，它们的相对速度（relative velocity）便是常数，各自看到对方沿直线运动。碰撞发生的充要条件，是这个相对速度的方向正好沿着时刻 T 时连接两者的直线，把这个条件写出来便得到同一条二次方程。像这样转换到自由下落的参考系（frame），正是通往爱因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）的第一步。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对相对运动和非惯性参考系（non-inertial frame）有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。