详细解答

STEP II 2005，第 1 题

纯数学 · 多项式与驻点

STEP II 2005，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s2-q1

关键思路

用积法则（product rule）对任何形如 $P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 的式子求导，会得到 $(P'(x)-2xP(x))\mathrm{e}^{-x^2}$；由于 e^{-x^2} 永不为零，驻点（stationary point）正好就是多项式（polynomial）$P'(x)-2xP(x)$ 的实根。于是第二部分变成一个逆向问题：先决定我们希望 $P'-2xP$ 是哪一个多项式，然后通过比较系数（comparing coefficients）倒推出 P。

解答

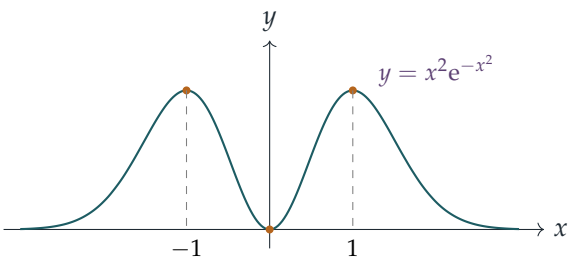
第一部分

由积法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\mathrm{e}^{-x^2}\right)=2x\,\mathrm{e}^{-x^2}+x^2\cdot(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2}=2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

由于对所有 x 都有 $\mathrm{e}^{-x^2}>0$，上式为零当且仅当 $x(1-x^2)=0$，即

$$x=0,\qquad x=1,\qquad x=-1.$$



图像在原点有一个极小点，并在 $x=\pm1$ 处有高度为 e^{-1} 的极大点。

第二部分

对任何多项式 P，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \left(P'(x) - 2xP(x)\right)\mathrm{e}^{-x^2},$$

所以，同样因为 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$，导数（derivative）为零之处正好就是 $P'(x) - 2xP(x) = 0$ 之处。第一部分正符合这个模式：$P(x) = x^2$ 给出 $P' - 2xP = -2x(x^2 - 1)$。因此我们的目标是

$$P'(x) - 2xP(x) = -2x\left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - b^2\right), \qquad (*)$$

它的实根只有 0、$\pm a$ 和 $\pm b$。这是五个相异的值，因为 a 和 b 是相异的正数。

? **想一想** P 的次数应该是多少？为甚么它应该只含偶数次幂？

若 P 的次数为 n，首项系数（leading coefficient）为 c，则 P' 的次数为 $n-1$，所以 $P' - 2xP$ 的次数为 $n+1$，首项系数为 $-2c$。$(*)$ 的右方次数为 5，首项系数为 -2，所以我们需要 $n = 4$ 和 $c = 1$。此外，右方是一个奇函数（odd function）；若 P 是偶函数（even function），则 P' 和 $2xP$ 都是奇函数，所以很自然会尝试

$$P(x) = x^4 + \beta x^2 + \gamma.$$

于是 $P'(x) = 4x^3 + 2\beta x$，而

$$\begin{aligned} P'(x) - 2xP(x) &= 4x^3 + 2\beta x - 2x^5 - 2\beta x^3 - 2\gamma x \\ &= -2x^5 + (4 - 2\beta)x^3 + (2\beta - 2\gamma)x, \end{aligned}$$

另一方面，$(*)$ 的右方展开后是

$$-2x^5 + 2\left(a^2 + b^2\right)x^3 - 2a^2b^2x.$$

比较 x^3 和 x 的系数：

$$\begin{aligned} 4 - 2\beta = 2\left(a^2 + b^2\right) \qquad &\Longrightarrow \qquad \beta = 2 - a^2 - b^2, \\ 2\beta - 2\gamma = -2a^2b^2 \qquad &\Longrightarrow \qquad \gamma = \beta + a^2b^2 = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2. \end{aligned}$$

所以其中一个合适的多项式是

$$\boxed{P(x) = x^4 + \left(2 - a^2 - b^2\right)x^2 + a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2.}$$

这样选取后，$(*)$ 恒成立，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -2x\left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - b^2\right)\mathrm{e}^{-x^2},$$

它在 $x = 0$、$x = \pm a$ 和 $x = \pm b$ 时为零，而且由于 $\mathrm{e}^{-x^2} \neq 0$，在其他 x 值都不为零。P 的任何非零常数倍同样可行。

验算

- 取 $a=1$、$b=2$：这时 $P(x)=x^4-3x^2+1$，而 $P'-2xP=4x^3-6x-2x^5+6x^3-2x=-2x^5+10x^3-8x=-2x(x^2-1)(x^2-4)$，符合要求。
- 数值上，当 $a=0.7$、$b=1.9$ 时，$P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 的导数在 $[-5,5]$ 上只在 $x=0,\pm0.7,\pm1.9$ 附近变号；这条公式亦已用数千组随机的 (a,b,x) 验证过。
- 粗略地令 $b\to 0$：$P\to x^4+(2-a^2)x^2+2-a^2$，导数变成 $-2x^3(x^2-a^2)\mathrm{e}^{-x^2}$，位于 0 和 $\pm b$ 的根合而为一。

常见错误

- 漏掉链式法则（chain rule）带来的因子：e^{-x^2} 的导数是 $-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$，而不是 e^{-x^2}。
- 为了配合五个根而猜 P 的次数是 5：对 $P\mathrm{e}^{-x^2}$ 求导会令次数增加一，所以 P 的次数是 4。
- 没有说明为何没有其他驻点：这需要用到 $\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$，以及该五次多项式只有这些根这个事实。

STEP 之外

映射 $P\mapsto P'-2xP$ 是多项式上的一个线性算子（linear operator），而解 $(*)$ 就是解一条一阶线性微分方程（first-order linear differential equation），其积分因子（integrating factor）为 e^{-x^2}。形如 $H(x)\mathrm{e}^{-x^2}$（其中 H 为多项式）的函数引出埃尔米特多项式（Hermite polynomials），它们出现于概率（正态分布，normal distribution）和量子谐振子（quantum harmonic oscillator）之中。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）涵盖积分因子和埃尔米特方程（Hermite's equation）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。