详细解答

STEP I 2005，第 9 题

力学 · 刚体平衡

STEP I 2005，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s1-q9

关键思路

整道题的关键在于一个未知量：这根非均匀杆的质心（centre of mass）G 位于何处。头两个装置各自给出以该位置表示的 T，把两者等同起来，便可同时定出 G 和 T。之后，倾斜的装置就是一道标准的刚体（rigid body）问题：先对未知接触力所作用的那一点取力矩（moments），然后分解（resolve）各力。

解答

我们把杆看作刚体，其全部重量 W 作用于质心 G，并把绳看作轻而不可伸长（light and inextensible）。设 $AG = x$，则 $GB = 3l - x$。

求 G 的位置并证明 $5T = 2W$

*两端各系一绳。*对 B 取力矩，可消去 B 处未知的张力（tension）：

$$T \cdot 3l = W(3l - x).$$

*支点距离 A 为 l，绳系于 B。*设 P 为支点（pivot），则 $PB = 2l$。对 P 取力矩，可消去未知的支点反作用力。B 处的绳要把杆拉住，G 必须位于 P 靠 B 的一侧，故 $PG = x - l$，而

$$T \cdot 2l = W(x - l).$$

消去 T（把第一条方程乘以 2，第二条乘以 3，然后比较）：

$$2W(3l - x) = 3W(x - l) \quad \Longrightarrow \quad 9l = 5x \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}l.$$

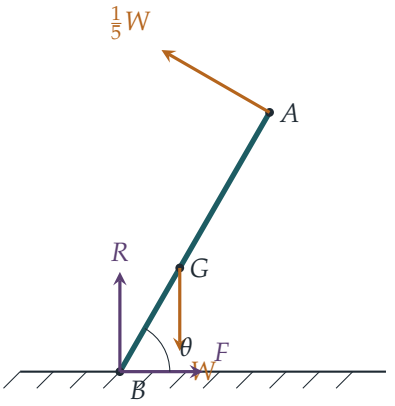
于是由第二条方程得 $2lT = W \cdot \frac{4}{5}l$，故 $T = \frac{2}{5}W$，即

$$5T = 2W,$$

正如所求。留意 $x = \frac{9}{5}l > l$，这与我们假设 G 在支点之外是一致的。因此 G 与 B 的距离为 $GB = 3l - \frac{9}{5}l = \frac{6}{5}l$。

杆搁在地面上

现在 B 在粗糙的地面上，杆与水平成 θ 角，而 A 处的绳垂直于杆，张力为 $\frac{1}{2}T = \frac{1}{5}W$。在 B 处有向上的法向反作用力（normal reaction）R 和沿地面的摩擦力（friction）F。



对 B 取力矩。这样可消去 R 和 F。绳的拉力垂直于杆，作用点与 B 相距 $3l$，故其力矩为 $\frac{1}{5}W \cdot 3l$。重量沿杆相距 $\frac{6}{5}l$ 之处铅垂作用，故其作用线与 B 的垂直距离为 $\frac{6}{5}l\cos\theta$。因此

$$\tfrac{1}{5}W \cdot 3l = W \cdot \tfrac{6}{5}l\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta = \tfrac{1}{2},$$

所以 $\theta = 60°$（即 $\frac{\pi}{3}$）。

想一想 绳的张力的各个分量指向哪一方？

杆与水平成 θ 角，而绳与杆成直角，所以绳与铅垂线成 θ 角。因此其张力 $\frac{1}{5}W$ 的铅垂分量为 $\frac{1}{5}W\cos\theta$（向上），水平分量为 $\frac{1}{5}W\sin\theta$，指向越过 B 的后方，即背离 A 所在的一侧。摩擦力必须抵销这个水平拉力，所以它在 B 处指向 A 所在的一侧，如图所示。

沿铅垂方向分解：

$$R + \tfrac{1}{5}W\cos 60° = W \quad\Longrightarrow\quad R = W - \tfrac{1}{10}W = \tfrac{9}{10}W.$$

沿水平方向分解：

$$F = \tfrac{1}{5}W\sin 60° = \tfrac{\sqrt{3}}{10}W.$$

只要 $F \le \mu R$，杆便不会滑动，即

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/10}{9/10} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

所以能防止滑动的最小摩擦系数（coefficient of friction）为 $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{9} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.192$（等号成立时，杆处于极限平衡（limiting equilibrium））。

验算

- 取 $x = \frac{9}{5}l$，双绳装置给出 $T = W \cdot \frac{6/5}{3} = \frac{2}{5}W$，而支点装置给出 $T = W \cdot \frac{4/5}{2} = \frac{2}{5}W$：两者相同，理应如此。
- 在倾斜的位置，再对 A 取力矩（取 $W = l = 1$，$\theta = 60°$，$R = 0.9$，$F \approx 0.1732$），所得的合力矩同样为零，这一并验证了 R 和 F。
- 数值上 $\mu_{\min} = \sqrt{3}/9 \approx 0.19245$，这已由电脑建立各力的向量并检查全部三条平衡方程加以确认。

常见错误

- 以 $\frac{6}{5}l\sin\theta$ 作为重量的力臂。由 B 至重量作用线的水平距离是 $\frac{6}{5}l\cos\theta$。
- 忘记垂直于杆的绳有铅垂分量，而取 $R = W$。这样会得出 $\mu = \sqrt{3}/10$，数值偏小。
- 假设杆是均匀的，以为 G 在中点。第一部分的全部目的正是要找出 G 的位置。

STEP 之外

利用平衡时的量度来确定质心的位置，是一个强大想法的静力学版本：一个力系对某一点的力矩决定了该力系，只差一个合力。到了大学，这会发展成刚体静力学以至动力学的研究，其中质心和转动惯量（moment of inertia）就是支配物体运动的两个数。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics* 讲述力矩（torque）与刚体，并附有大量这类风格而难度更高的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。