详细解答

STEP I 2005，第 8 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP I 2005，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s1-q8

关键思路

开头的恒等式(identity)其实是一道配方,教我们辨认形如 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky^2 + (\text{只含}x\text{ 的式子})$ 的方程。方程一旦写成这个形状，代换（substitution）$y^2 = x^k f(x)$ 便会把 y^2 项消去，剩下 $f'(x)$ 等于一个 x 的函数，直接积分即可。真正要花工夫的，只有选取 k，以及在第 (ii) 部分把方程两边同除，使左边变成 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解答

恒等式

把 $y^2 = x^k f(x)$ 对 x 作隐函数求导（implicit differentiation），右边用积法则（product rule）：

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1}f(x) + x^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

两边乘以 x，

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\,x^k f(x) + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = ky^2 + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

因为 $x^k f(x) = y^2$。这就是所求的结果。

第 (i) 部分

取 $k = 1$，写成 $y^2 = xf(x)$，恒等式便给出 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + x^2 f'(x)$。与题目给出的方程比较，$y^2$ 项互相吻合，所以方程成立当且仅当

$$x^2 f'(x) = x^2 - 1, \qquad \text{即} \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

积分得 $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + c$，所以

$$y^2 = xf(x) = x^2 + cx + 1.$$

由条件“当 $x = 1$ 时 $y = 2$”得 $4 = 1 + c + 1$，所以 $c = 2$，而

$$y^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

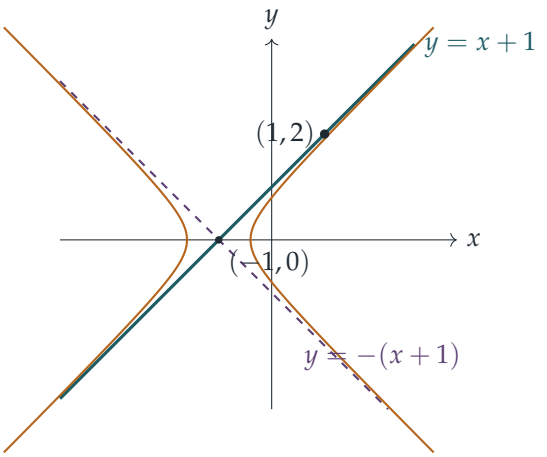
因此 $y = x + 1$ 或 $y = -(x+1)$；只有 $y = x + 1$ 通过 $(1, 2)$，所以解是

$$y = x + 1.$$

（代回原式：$2x(x+1)\cdot 1 = 2x^2 + 2x$，而 $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 2x^2 + 2x$，所以它对每一个 x 都满足方程，包括我们曾经用来作除数的 $x = 0$。）

想一想 答案只不过是 $y = x + 1$，那么“从几何角度描述”究竟想我们写甚么？

解曲线是一条直线：它的斜率(gradient)为 1，通过 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$，与 x-axis 所在的横轴成 45° 角。值得一提的是，这个结果其实有点出人意表。通解(general solution) $y^2 - x^2 - cx = 1$ 是一族圆锥曲线（conics）；配方（completing the square）后得 $y^2 - (x + \frac{c}{2})^2 = 1 - \frac{c^2}{4}$，这是一条等轴双曲线（rectangular hyperbola），中心在 $(-\frac{c}{2}, 0)$，渐近线（asymptotes）为 $y = \pm(x + \frac{c}{2})$。初始条件（initial condition）选出了 $c = 2$，这正是右边等于零的情况，双曲线退化（degenerate）成它自己的一对渐近线 $y = \pm(x+1)$。我们的解就是这对直线中的 $y = x + 1$ 那一支。



实线是所求的解；虚线是 $y^2 = (x+1)^2$ 的另一半。琥珀色的曲线勾画出这族曲线中非退化成员的形状：一条等轴双曲线，以类似这样的一对直线为渐近线，并逐渐向它们靠近。

第 (ii) 部分

要使用恒等式，左边必须是 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，所以把方程除以 x（$\ln x$ 项已限定 $x>0$，所以这一步并无问题）：

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + \frac{2\ln x}{x}.$$

y^2 的系数是 -1，所以取 $k=-1$，即 $y^2 = f(x)/x$。这时 $x^{k+1} = x^0 = 1$，恒等式变成 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + f'(x)$。比较两式，

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)^2 = \frac{2\ln x}{x}$，我们得到 $f(x) = (\ln x)^2 + c$，于是

$$y^2 = \frac{(\ln x)^2 + c}{x}.$$

当 $x=1$ 时 $y=1$：$1 = (0+c)/1$，所以 $c=1$。这里取正平方根，因为在 $x=1$ 处 $y=1>0$，而且 y 永不为零（分子 $1+(\ln x)^2$ 最少是 1），所以解是

$$y = \sqrt{\frac{1+(\ln x)^2}{x}}, \qquad x>0.$$

验算

- 在 (i) 中，直线 $y=x+1$ 可以如上文般直接代入方程验证；由 $(1,2)$ 出发对方程作数值积分（龙格—库塔法，Runge–Kutta），在 $x=2$ 得 $y=3.000$，在 $x=5$ 得 $y=6.000$。
- 在 (ii) 中，$y^2 = (1+(\ln x)^2)/x$ 给出 $y(3)\approx 0.8577$ 和 $y(0.2)\approx 4.2369$；由 $(1,1)$ 出发对微分方程作数值积分，结果在小数点后多个位都吻合。
- 恒等式本身：试取 $k=0$，它便简化成 $2xy\,y' = xf'$，这只不过是 $(y^2)' = f'$ 乘以 x。

常见错误

- 在 (ii) 中出于习惯而用了 $k=1$。除以 x 之后，y^2 项的正负号才是决定 $k=-1$ 的关键。
- 在 (ii) 中忘记除以 x，结果尝试拿 $2x^2y\,y'$ 去配对恒等式。
- 把 (i) 的答案停留在 $y^2=(x+1)^2$，没有选出通过 $(1,2)$ 的那一支。

STEP 之外

这里的代换其实是一个标准技巧的变装版本：设 $u = y^2$，便把 $2xy\,y' = ky^2 + g(x)$ 化成线性（linear）方程 $xu' - ku = g(x)$，而 x^{-k} 就是它的积分因子（integrating factor）。经幂代换后变成线性的方程称为伯努利方程（Bernoulli equations），是大学常微分方程（ODE）课程中最早遇到的非线性方程之一。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（一本常微分方程入门教科书）把它们与积分因子和恰当方程（exact equations）放在一起讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。