详细解答

STEP I 2005，第 7 题

纯数学 · 裂项相消乘积

STEP I 2005，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s1-q7

关键思路

三个乘积全部都可以裂项相消（telescope）：把每个因子写成比 $g(r+1)/g(r)$ 的形式，或写成若干个这类比的乘积，几乎所有项便会互相约去，只剩下首尾两个值。第 (i) 及第 (ii) 部分是热身，用来展示这个机制。第 (iii) 部分的工夫，在于看出那个三角因子其实暗地里正是这样的一个比。以 $\sin\frac{(2r-1)\pi}{n}$ 为公分母通分后，分子就变成一个复角（compound angle）的正弦。

解答

第 (i) 部分

把乘积逐项写出，

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}.$$

每个分子都与下一个因子的分母约去，所以只剩下最后一个分子和第一个分母：

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{n+1}{1}=n+1.$$

第 (ii) 部分

把分子因式分解（factorise），$r^2-1=(r-1)(r+1)$，并把每个因子拆成两个：

$$\frac{r^2-1}{r^2}=\frac{r-1}{r}\times\frac{r+1}{r}.$$

由于乘积的乘积就是各因子的乘积，我们可以把这两组因子分开处理（这里 $n \geq 2$）：

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r-1}{r} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$
$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r+1}{r} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

两者都与第 (i) 部分一模一样地裂项相消。相乘得

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r^2-1}{r^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

第 (iii) 部分

设 $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ 及 $\beta_r = \dfrac{(2r-1)\pi}{n}$，则第 r 个因子为 $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r$。

? **想一想** $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta$ 怎样才能写成两个相似的量之比?

利用 $\cot\beta = \cos\beta / \sin\beta$ 并通分。这时分子正是一个复角的展开式：

$$\cos\alpha + \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

这一步需要 $\sin\beta_r \neq 0$，而“n 是偶数”这个条件正是在这里用上。只有当 $(2r-1)/n$ 是整数时，才会有 $\sin\beta_r = 0$。但 $2r-1$ 是奇数而 n 是偶数，奇数不可能是 n 的倍数。因此每个因子都有定义，而下文的每个分母都不为零。

现在 $\alpha + \beta_r = \dfrac{2\pi + (2r-1)\pi}{n} = \dfrac{(2r+1)\pi}{n} = \beta_{r+1}$，所以

$$\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r = \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r}.$$

这正好是第 (i) 部分的形式，其中 $g(r) = \sin\beta_r$。乘积裂项相消：

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \times \frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_2} \times \cdots \times \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_n}$$
$$= \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_1} = \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin(2\pi + \frac{\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

由于 sin 的周期（period）为 2π，分子等于分母，故

$$\prod_{r=1}^{n} \left(\cos\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n} \cot\tfrac{(2r-1)\pi}{n}\right) = 1.$$

验算

- 第 (i) 部分，取 $n = 3$：$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4 = n + 1$。
- 第 (ii) 部分，取 $n = 2$：唯一的因子是 $\frac{3}{4}$，而 $\frac{n+1}{2n} = \frac{3}{4}$。当 $n \to \infty$ 时，乘积趋向 $\frac{1}{2}$，这是一个著名的无穷乘积（infinite product）。
- 第 (iii) 部分，取 $n = 4$：$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ 及 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$，所以各因子为 $\cot \frac{\pi}{4}$、$\cot \frac{3\pi}{4}$、$\cot \frac{5\pi}{4}$ 和 $\cot \frac{7\pi}{4}$，即 1、-1、1 和 -1，乘积为 1。我们亦以数值计算验证过，对 60 以内的每个偶数 n，乘积都等于 1（误差在 10^{-8} 以内）。
- 若 n 是奇数，$r = \frac{n+1}{2}$ 的那个因子涉及 $\cot \pi$，而它没有定义。这就解释了题目为何要有这个条件。

常见错误

- 在第 (ii) 部分，由 $r = 1$ 开始相消：下限是 2，所以最先的两个因子是 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$。
- 在第 (iii) 部分，停在 $\sin \frac{(2n+1)\pi}{n} \big/ \sin \frac{\pi}{n}$ 就算，没有利用周期性把它化简为 1。
- 没有解释“n 是偶数”用在哪里。正是这个条件，令每个余切（cotangent）以及每个分母都有妥善的定义。

STEP 之外

乘积的裂项相消，与你在部分分式（partial fractions）中遇到的裂项求和，是乘法与加法上的一对近亲。取对数（logarithm）就能把其中一个变成另一个。第 (ii) 部分是无穷乘积 $\prod_{r \geq 2}(1 - 1/r^2) = \frac{1}{2}$ 的有限版本。像这样的无穷乘积，以及欧拉（Euler）乘积

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{r \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right),$$

要到大学第一门分析（analysis）课程才会严谨地研究；在那里，乘积的收敛（convergence）是通过对数之和的收敛来定义的。Abbott 的 *Understanding Analysis* 是建立所需收敛概念的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。