详细解答

STEP I 2005，第 6 题

纯数学 · 阿波罗尼奥斯圆

> **STEP I 2005，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q6

关键思路

像 $AP = 2BP$ 这样的条件含有平方根，所以先把它平方：距离的平方是多项式（polynomial），而且两边 $x^2 + y^2$ 项的系数（coefficient）相同，这正是轨迹为圆的原因。在第 (ii) 部分，我们对 x-axis 上任意一对点作同样的处理；而两条形如 $x^2 + y^2 + px + q = 0$ 的方程描述同一个圆，当且仅当两者的 p 和 q 分别相同。比较系数（comparing coefficients）可得 k^2 的两个表达式，再消去 k 便得出两个结果。

解答

第 (i) 部分

两个长度都是非负的，所以 $AP = 2BP$ 等价于 $AP^2 = 4BP^2$：

$$(x-5)^2 + (y-16)^2 = 4[(x+4)^2 + (y-4)^2].$$

展开得

$$x^2 - 10x + y^2 - 32y + 281 = 4x^2 + 32x + 4y^2 - 32y + 128.$$

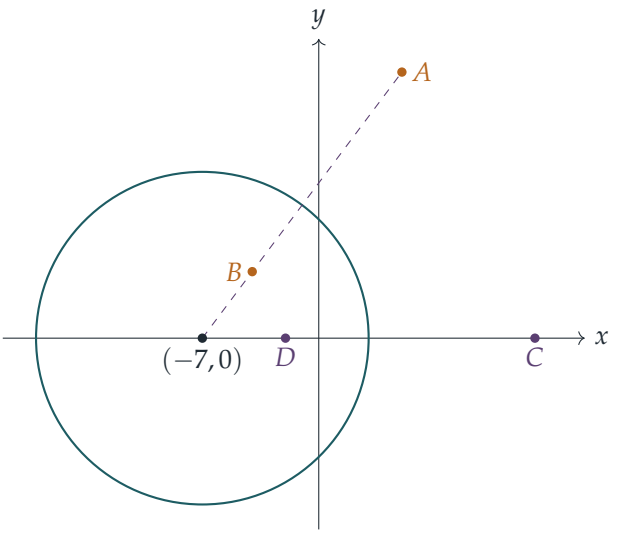
含 y 的一次项互相抵消，把所有项移到右边，得

$$3x^2 + 42x + 3y^2 - 153 = 0, \qquad \text{即} \qquad x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0.$$

配方（completing the square），$x^2 + 14x = (x+7)^2 - 49$，所以

$$(x+7)^2 + y^2 = 100,$$

这正是所要证明的。轨迹是圆心为 $(-7, 0)$、半径为 10 的圆。



（点 $C = (13, 0)$ 和 $D = (-2, 0)$ 是第 (ii) 部分其中一对可能的点，此时 $k = 2$。留意 A、B 与圆心同样共线（collinear）。）

第 (ii) 部分

与之前一样，$QC = kQD$ 等价于 $QC^2 = k^2QD^2$。设 $Q = (x, y)$，则

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2[(x-b)^2 + y^2].$$

把各项移到右边并整理，

$$(k^2-1)(x^2+y^2) - 2(k^2b - a)x + (k^2b^2 - a^2) = 0.$$

由于 $k > 1$，我们有 $k^2 - 1 \neq 0$，故可以除以它：

$$x^2 + y^2 - \frac{2(k^2b-a)}{k^2-1}\,x + \frac{k^2b^2 - a^2}{k^2-1} = 0.$$

想一想 为甚么我们可以与 $x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0$ 比较系数?

方程 $x^2 + y^2 + px + q = 0$ 可以改写成 $(x + \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$。如果它是圆心为 $(-7, 0)$、半径为 10 的圆，那么圆心迫使 $p = 14$，半径迫使 $\frac{1}{4}p^2 - q = 100$，所以 $q = -51$。一个圆只有一个圆心和一个半径，所以两条方程必须有相同的 p 和相同的 q。

比较 x 的系数：

$$\frac{k^2b - a}{k^2 - 1} = -7 \implies k^2b - a = -7k^2 + 7 \implies k^2(b+7) = a + 7.$$

比较常数项：

$$\frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1}=-51 \implies k^2b^2-a^2=-51k^2+51 \implies k^2(b^2+51)=a^2+51.$$

现在 $b^2+51>0$，而且 $b+7\neq 0$：假如 $b=-7$，第一条方程便会给出 $a=-7=b$，而这是题目排除了的情况。因此我们可以分别除以这两个量，得到 k^2 的两个表达式：

$$\frac{a+7}{b+7}=k^2=\frac{a^2+51}{b^2+51},$$

这就是第一个结果。

至于第二个结果，交叉相乘：

$$(a+7)(b^2+51)=(b+7)(a^2+51).$$

展开后，常数 357 在两边互相抵消，余下

$$ab^2+51a+7b^2=a^2b+51b+7a^2.$$

把各项分组，使每一组都出现 $a-b$：

$$\begin{aligned}0&=(a^2b-ab^2)-51(a-b)+7(a^2-b^2)\\&=(a-b)[ab-51+7(a+b)].\end{aligned}$$

由于 $a\neq b$，我们可以除以 $a-b$，所以

$$ab+7a+7b=51,\quad \text{所以}\quad ab+7a+7b+49=100,\quad \text{即}\quad (a+7)(b+7)=100,$$

这正是所要证明的。

验算

- 试取 $b=-2$：这时 $b+7=5$，所以 $a+7=20$，$a=13$，得出 $k^2=20/5=4$。点 $(3,0)$ 在圆上，而 $QC=10=2\times 5=2\,QD$。点 $(-17,0)$ 也在圆上，此时 $QC=30=2\times 15$。
- 在第 (i) 部分，点 $(3,0)$ 给出 $AP=\sqrt{4+256}=\sqrt{260}$ 和 $BP=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$，而确实有 $\sqrt{260}=2\sqrt{65}$。
- 我们亦以数值方法验证过：对于许多满足 $(a+7)(b+7)=100$ 的点对，圆上随机选取的点都满足 $QC=kQD$；而且每一对满足第一个结果且 $a\neq b$ 的数，也都满足第二个结果。

常见错误

- 未除以 k^2-1 便比较系数：两条方程只需相差一个整体的常数倍便已描述同一个圆。
- 除以 $b+7$ 之前没有检查它是否非零。
- 遗漏因子 $a-b$：它所对应的正是题目排除了的平凡解 $a=b$。

STEP 之外

与两个定点的距离成固定比 $k \neq 1$ 的点的轨迹（locus），称为*阿波罗尼奥斯圆*（*circle of Apollonius*）。结果 $(a+7)(b+7)=100$ 说明 C 和 D 位于圆心的同一侧，并且 $MC \cdot MD = r^2$，其中 M 是圆心，r 是半径：C 和 D 是关于这个圆的*反演点*（*inverse points*）。（A 和 B 也是如此：$MA=20$，$MB=5$。）圆的反演（inversion）是几何和复分析（complex analysis）中十分有力的工具，在复分析中它就是映射 $z \mapsto 1/\bar{z}$；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）对此有精彩的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。