详细解答

STEP I 2005，第 5 题

纯数学 · 幂的积分

STEP I 2005，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s1-q5

关键思路

$x+1$ 的幂可以用反向链式法则（reverse chain rule）来积分：$\int (x+1)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$，但有一个例外：当 $n=-1$ 时，答案是对数（logarithm）。因此，本题所有的分类讨论都源于同一个问题："指数何时会变成 -1?"在 (ii) 中，多出来的因子 x 可以通过写成 $x=(x+1)-1$ 来消去，剩下两个单纯的幂，所以 m 有两个例外值。

解答

第 (i) 部分

若 $k \neq 0$，指数 $k-1$ 不等于 -1，所以

$$\int_0^1 (x+1)^{k-1} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^k}{k}\right]_0^1 = \frac{2^k-1}{k}.$$

若 $k=0$，被积函数（integrand）是 $\frac{1}{x+1}$，而由于在 $[0,1]$ 上 $x+1>0$，

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} \,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

? **想一想** 为甚么 $k \neq 0$ 时的答案会与 $k=0$ 时的答案有关?

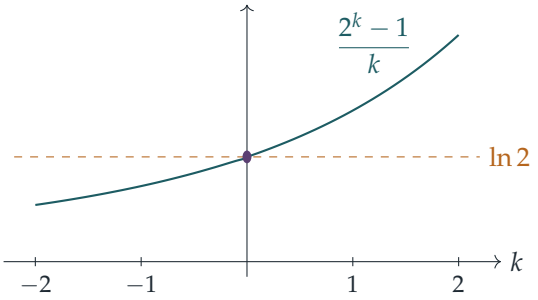
因为当 k 稍微偏离 0 时，被积函数几乎没有变化。对于 $0 \leq x \leq 1$，

$$\left|(x+1)^{k-1} - (x+1)^{-1}\right| = \frac{\left|(x+1)^k - 1\right|}{x+1} \leq \left|2^k - 1\right|,$$

这是因为 $1 \le x+1 \le 2$ 意味着 $(x+1)^k$ 介乎 1 与 2^k 之间。在长度为 1 的区间上积分，两个积分之差至多为 $|2^k-1|$，而当 $k \to 0$ 时，此值趋向 0。因此，对于 $k \approx 0$（且 $k \neq 0$），

$$\frac{2^k-1}{k} = \int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 (x+1)^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln 2,$$

正如所求。换句话说，$k \neq 0$ 时的公式在 $k=0$ 处有一个“洞”，而 $k=0$ 时的积分恰好把它填上。



第 (ii) 部分

写成 $x = (x+1)-1$，于是

$$x(x+1)^m = (x+1)^{m+1} - (x+1)^m.$$

每一项都是 $x+1$ 的幂，而对它积分时，恰好在其指数为 -1 时才会出现对数。这发生于 $m+1=-1$ 或 $m=-1$，所以要分的情况是 $m=-1$、$m=-2$，以及其余所有情况。

一般情况， $m \neq -1, -2$。

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^{m+2}}{m+2} - \frac{(x+1)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{2^{m+2}-1}{m+2} - \frac{2^{m+1}-1}{m+1}.$$

通分之后，分子为

$$(m+1)\left(2^{m+2}-1\right) - (m+2)\left(2^{m+1}-1\right) = 2^{m+1}\left(2(m+1)-(m+2)\right)+1 = m\,2^{m+1}+1,$$

所以

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \frac{m\,2^{m+1}+1}{(m+1)(m+2)}, \qquad m \neq -1, -2.$$

情况 $m=-1$。

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

情况 $m=-2$。

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2+\tfrac{1}{2}-1 = \ln 2-\tfrac{1}{2}.$$

想一想 一般公式在 $m=-1$ 和 $m=-2$ 处会出现 $0/0$。这是否矛盾?

不是：这其实是第 (i) 部分的重演。在 $m=-1$ 处，分子为 $-1\cdot 2^0+1=0$，而在 $m=-2$ 处，分子为 $-2\cdot 2^{-1}+1=0$，所以公式在这两处只是没有定义，而不是错误；而且与第 (i) 部分一样，它的极限（limit）值正是特殊情况的答案（$1-\ln 2\approx 0.307$ 和 $\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0.193$）。

验算

- $m=0$：$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，而公式给出 $\frac{0+1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$。至于 $m=1$：$\int_0^1(x^2+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$，而公式给出 $\frac{4+1}{6}$。
- 数值上，$k=10^{-4}$ 给出 $\frac{2^k-1}{k}\approx 0.693171$，对比 $\ln 2\approx 0.693147$。
- 对所有积分使用辛普森法则（Simpson's rule），取多个 k 和 m 的值（包括 $m=-1,-2$），结果与公式吻合至 10^{-9}。把 $m=-1\pm 10^{-5}$ 代入一般公式，得 $0.30685\ldots$，与 $1-\ln 2$ 相符。

常见错误

- 在 $k=0$ 时写出 $\frac{(x+1)^0}{0}$，或没有留意到 (ii) 中 m 有两个例外值，而不是一个。
- 在 (ii) 中使用分部积分法（integration by parts），却仍然除以 $m+1$，没有察觉这在 $m=-1$ 时并不成立。
- 在 $m=-2$ 的情况中，弄错 $\int(x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x=-(x+1)^{-1}$ 的正负号。

STEP 之外

(i) 中的推论说明 $\lim_{k\to 0}\frac{2^k-1}{k}=\ln 2$，这正是 2^k 在 $k=0$ 处的导数（derivative）。当中用到的一般事实是：若被积函数一致收敛（converge uniformly），它们的积分也会收敛。这是大学一年级分析课程的一条核心定理，而缺少一致性时，结论便不成立。同样的想法也解释了为何当 $n\to -1$ 时，$\int x^n\,\mathrm{d}x$ 会“变成”$\ln x$。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对一致收敛与积分有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。