详细解答

# STEP I 2005，第 4 题

纯数学 · 倍角公式

> **STEP I 2005，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q4

## 关键思路

两部分都与倍角（multiple angles）有关。在 (i) 中，唯一真正要判断的是 $\sin\theta$ 的正负号，而题目给定的范围已把它确定下来；之后只需运用二倍角公式（double-angle formula）和三倍角公式（triple-angle formula）便可。在 (ii) 中，我们把 $\tan 3\theta$ 写成 $\tan(2\theta+\theta)$ 来推导，然后“由此”（hence）一步便化为关于 $t=\tan\theta$ 的三次方程（cubic）。STEP 题目中的三次方程几乎总有一个可以看出来的根（root），而 $\theta$ 的范围则告诉我们应保留哪一个根。

## 解答

### 第 (i) 部分

由于 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，

$$\sin^2\theta = 1-\tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25}, \qquad \text{所以} \qquad \sin\theta = \pm\tfrac{4}{5}.$$

当 $\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$ 时，$\theta$ 位于第四象限（fourth quadrant），该处 $\sin\theta\le 0$。所以 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$，而

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

正是所求。

要求 $\cos 3\theta$，我们需要三倍角公式。记 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$，

$$\begin{aligned}\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2c^2-1)c - 2s^2c \\ &= (2c^2-1)c - 2(1-c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

代入 $c = \frac{3}{5}$，

$$\cos 3\theta = 4\cdot\frac{27}{125} - \frac{9}{5} = \frac{108-225}{125} = -\frac{117}{125}.$$

（这里 $\sin\theta$ 的正负号并无影响，因为 $\cos 3\theta$ 只取决于 $\cos\theta$。）

**第 (ii) 部分**

**恒等式 (identity)**。记 $t = \tan\theta$。由二倍角公式，$\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$，再由和角公式（addition formula），

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\tan\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}}.$$

把分子和分母同乘以 $1-t^2$，

$$\tan 3\theta = \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t-t^3}{1-3t^2},$$

这就是所求的恒等式。以上推导需要 $\tan 2\theta$ 存在，即 $t^2 \neq 1$；当 $t = \pm 1$ 时，我们可以直接验证：例如取 $\theta = \frac{\pi}{4}$，右方为 $\frac{3-1}{1-3} = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$，而 $t = -1$ 的情况相同，只是正负号互换。

**解** $\tan 3\theta = \frac{11}{2}$。由恒等式，

$$\frac{3t-t^3}{1-3t^2} = \frac{11}{2} \quad\Longrightarrow\quad 6t - 2t^3 = 11 - 33t^2 \quad\Longrightarrow\quad 2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = 0.$$

这里交叉相乘并无问题，因为 $1-3t^2 \neq 0$：假如它等于零，$\tan 3\theta$ 便没有定义，而不会是 $\frac{11}{2}$。

> **想一想** 怎样找出 $2t^3 - 33t^2 - 6t + 11$ 的一个根?

任何写成最简分数 $p/q$ 的有理根（rational root），其 $p$ 必整除 11，$q$ 必整除 2，所以我们只需试 $\pm 1, \pm 11, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}$。试 $t = \frac{1}{2}$：

$$2\cdot\tfrac{1}{8} - 33\cdot\tfrac{1}{4} - 3 + 11 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{33}{4} + 8 = 0.$$

所以 $2t-1$ 是一个因式（factor），比较系数可得

$$2t^3-33t^2-6t+11=(2t-1)(t^2-16t-11).$$

该二次式的根为 $t=8\pm\sqrt{64+11}=8\pm5\sqrt{3}$。所以三个候选值是

$$t=\tfrac{1}{2},\qquad t=8+5\sqrt{3}\approx16.66,\qquad t=8-5\sqrt{3}\approx-0.66.$$

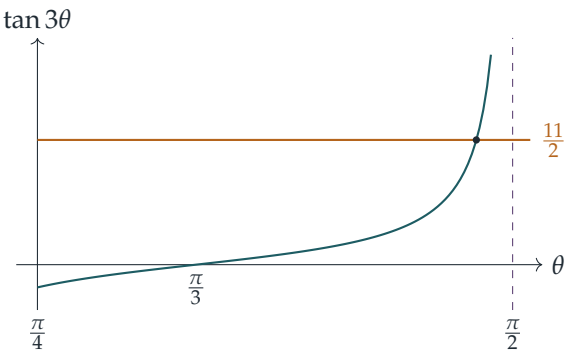
它们对应 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的三个角，这些角的三倍的正切都是 $\frac{11}{2}$。

现在运用题目给定的范围。由于 tan 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上递增，且 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，我们需要 $t\geq1$（而 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 本身须排除，因为 $\tan\theta$ 在该处没有定义）。只有一个候选值符合要求：

$$\tan\theta=8+5\sqrt{3}.$$

另外两个确实是三次方程的根，但所属的角在范围之外：$\frac{1}{2}<1$ 而 $8-5\sqrt{3}<0$。

图像亦确认恰好只有一个解：当 $\theta$ 由 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$3\theta$ 由 $\frac{3\pi}{4}$ 变到 $\frac{3\pi}{2}$，而在该区间上 $\tan3\theta$ 由 $-1$ 连续递增至 $+\infty$，所以它恰好一次穿过 $\frac{11}{2}$。




## 验算

- 在 (i) 中，$\theta=2\pi-\arccos\frac{3}{5}\approx5.3559$，用计算机可得 $\sin2\theta=-0.96$ 及 $\cos3\theta=-0.936=-\frac{117}{125}$。
- 在 (ii) 中，$\theta=\arctan(8+5\sqrt{3})\approx1.5108$，介乎 $\frac{\pi}{4}\approx0.785$ 与 $\frac{\pi}{2}\approx1.571$ 之间，而 $\tan3\theta\approx5.5000$。
- 快速检验恒等式：当 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，$t=2-\sqrt{3}$，右方化简后得 $1=\tan\frac{\pi}{4}$。

## 常见错误

- 在 (i) 中取 $\sin\theta=+\frac{4}{5}$，以致 $\sin2\theta$ 的正负号出错。

▶ 在 (ii) 中因为 $t = \frac{1}{2}$ 是自己看出来的根，便就此停下。它确是三次方程的根，但 $\arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$。

## STEP 之外

这个三次方程有三个根，是因为 $\tan 3\theta = \frac{11}{2}$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有三个 $\theta$ 的解，彼此相隔 $\frac{\pi}{3}$。同一机制反过来运作，便是三次方程的经典三角解法；更一般而言，棣美弗定理（de Moivre's theorem）把 $\tan n\theta$ 表示为 $\tan\theta$ 的两个多项式（polynomial）之比，而这些多项式的根正是等距分布的角的正切。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）说明了为何倍角公式会如此自然地从 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ 中产生。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。