详细解答

STEP I 2005，第 3 题

纯数学 · 分式方程

STEP I 2005，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s1-q3

关键思路

把等式两边同乘 $(x-a)(x-b)$，将每条方程化为多项式方程（polynomial equation），然后数算它的实根（real root）数目。需要小心的地方是：去分母原则上有可能多出原方程不容许的“解” $x=a$ 或 $x=b$，所以我们必须验证这种情况绝不会发生。在第 (ii) 部分，二次方程有重根（repeated root）当且仅当其判别式（discriminant）为零，由此便得出所求的条件。

解答

第 (i) 部分

当 $x \neq a, b$ 时，我们可以乘以 $(x-a)(x-b)$，而方程等价于

$$\begin{aligned} x(x-b)+x(x-a) &= (x-a)(x-b) \\ 2x^2-(a+b)x &= x^2-(a+b)x+ab \\ x^2 &= ab. \end{aligned}$$

由于 a 与 b 同号，$ab>0$，所以这方程有两个相异实根 $x=\sqrt{ab}$ 和 $x=-\sqrt{ab}$。

我们仍须确认这两个根是容许的值。假如 $x=a$ 是根，则 $a^2=ab$，而由于 $a\neq 0$，这给出 $a=b$，与事实不符。同理，$x=b$ 也不是根。因此两个根都是真正的解，方程恰有两个相异实数解 $x=\pm\sqrt{ab}$。

第 (ii) 部分

同样，当 $x \neq a, b$ 时乘以 $(x-a)(x-b)$：

$$2x^2 - (a+b)x = (1+c)(x^2 - (a+b)x + ab),$$

整理后得

$$q(x) \equiv (1-c)x^2 + c(a+b)x - (1+c)ab = 0.$$

因为 $c \neq 1$，首项系数（leading coefficient）不为零，所以这确实是一条二次方程。

> **想一想** q 的其中一个根会不会是 a 或 b，以致必须舍去?

代入看看：

$$q(a) = (1-c)a^2 + c(a+b)a - (1+c)ab = a^2 - ab = a(a-b),$$
$$q(b) = b^2 - ab = b(b-a)$$

（含 c 的项互相抵消）。由于 a、b 皆不为零且互不相等，两者都不为零。所以 a 和 b 永远不是 q 的根。这表示 q 的每个实根都是原方程的解，反之亦然。

q 的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta &= c^2(a+b)^2 + 4(1-c)(1+c)ab \\ &= c^2[(a+b)^2 - 4ab] + 4ab \\ &= c^2(a-b)^2 + 4ab.\end{aligned}$$

若 $c^2 = -\dfrac{4ab}{(a-b)^2}$（而 $a \neq b$，所以可以除以 $(a-b)^2$），则 $\Delta = 0$。这时二次方程恰有一个（重）实根

$$x = -\frac{c(a+b)}{2(1-c)},$$

而根据上面的验证，这个根不是 a 或 b。所以方程恰有一个实数解，正如所求。（事实上逆命题（converse）也成立。若 $\Delta > 0$ 则有两个解，若 $\Delta < 0$ 则无解，所以这个条件也是必要的。）

改写条件。 通分后，

$$1 - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{-4ab}{(a-b)^2},$$

所以条件就是 $c^2 = 1 - \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$，正如所求。

推导 $0 < c^2 \leq 1$。平方数 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ 为非负，所以由第二种形式可得 $c^2 \leq 1$。第一种形式给出 $c^2 = -4ab/(a-b)^2$。由于 $ab \neq 0$，这个值不为零；而对于实数 c 有 $c^2 \geq 0$，所以 $c^2 > 0$。（这也告诉我们 $ab < 0$：a 与 b 异号，这与第 (i) 部分吻合。）因此，条件只有在 $0 < c^2 \leq 1$ 时才可能成立。

上限值是可以取到的。$c^2 = 1$ 当且仅当 $a + b = 0$，这时 $c = -1$（因为 $c \neq 1$）。

验算

- 取 $a = 4$，$b = -1$。则 $c^2 = 16/25$；选 $c = \frac{4}{5}$。重根为 $x = -\frac{4}{5} \cdot 3/(2 \cdot \frac{1}{5}) = -6$，而确实有 $\frac{-6}{-10} + \frac{-6}{-5} = 0.6 + 1.2 = 1.8 = 1 + c$。
- 极端情况 $a = 1$，$b = -1$，$c = -1$ 给出 $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = 0$，即 $2x^2 = 0$：只有一个解 $x = 0$。
- 在第 (i) 部分，$a = 1$，$b = 4$ 给出 $x = \pm 2$：$\frac{2}{1} + \frac{2}{-2} = 1$ 及 $\frac{-2}{-3} + \frac{-2}{-6} = 1$。

常见错误

- 去分母之后忘记检查所得的根不是 a 或 b。在本题中这一步结果并无影响，但仍必须加以证明。
- 展开判别式时没有把含 c^2 的项归并在一起。写出 $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$，条件才会干净利落地得出。
- 声称 $c^2 \geq 0$ 而不是 $c^2 > 0$。严格不等式（strict inequality）来自 $ab \neq 0$。

STEP 之外

等式左边是一个有理函数（rational function），而“它的图像与水平线 $y = 1 + c$ 相交多少次?”其实是一个关于其值域（range）的问题。这里找到的条件，挑出了该函数的转向点（turning point）的值，也就是水平线刚好与图像相切的高度。追问多项式何时有重根，会引出判别式，以及更一般的结式（resultant），这些都会在大学一年级的代数课程中出现。想做更多这类风格的题目，可参考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。