详细解答

STEP I 2005，第 2 题

纯数学 • 抛物线的切线与法线

> **STEP I 2005，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q2

关键思路

把抛物线（parabola）$y^2 = 4x$ 用 $(t^2, 2t)$ 参数化（parametrise）之后，每条切线（tangent）和法线（normal）都是一条关于 x 和 y 的简短线性方程，所以求交点不过是解两条联立线性方程。$(1, 0)$ 是焦点（focus），它位于 PQ 上这个条件，会化为 p 与 q 之间一条简洁的关系式，而正正是这条关系式令 P 和 Q 处的切线互相垂直。得到这一点之后，那个长方形几乎是自然而然地出现。

解答

切线与点 R

在点 $(t^2, 2t)$，我们有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2$，所以 C 在该点的斜率（gradient）是 $\dfrac{2}{2t} = \dfrac{1}{t}$（这没有问题，因为 $t \neq 0$）。因此 P 处的切线是

$$y - 2p = \frac{1}{p}\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + p^2,$$

同理，Q 处的切线是 $qy = x + q^2$。两式相减，

$$(p - q)\,y = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q),$$

由于 $p \neq q$，我们可以除以 $p - q$，得到 $y = p + q$。于是 $x = py - p^2 = p(p + q) - p^2 = pq$。所以

$$R = (pq,\ p + q),$$

正如题目所求。

法线与点 S

$(t^2, 2t)$ 处的法线与切线垂直，所以它的斜率是 $-t$。P 处的法线是

$$y - 2p = -p\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad px + y = 2p + p^3,$$

而 Q 处的法线是 $qx + y = 2q + q^3$。两式相减，

$$(p - q)\,x = 2(p - q) + (p^3 - q^3) = (p - q)(2 + p^2 + pq + q^2),$$

所以，再次除以 $p - q \neq 0$，

$$x = p^2 + pq + q^2 + 2, \qquad y = 2p + p^3 - px = -p^2q - pq^2 = -pq\,(p + q).$$

以上结果对任何 p 和 q 都成立；现在我们运用那个额外条件。

运用 $(1, 0)$ 位于 PQ 上这个条件

弦（chord）PQ 的斜率是

$$\frac{2p - 2q}{p^2 - q^2} = \frac{2}{p + q}$$

（当 $p + q \neq 0$ 时），所以它的方程是 $y - 2p = \dfrac{2}{p + q}(x - p^2)$，化简后得

$$(p + q)\,y = 2x + 2pq.$$

这个形式同时涵盖 $p + q = 0$ 的情况，这时它给出通过 P 和 Q 的铅垂线 $x = -pq = p^2$。代入 $(x, y) = (1, 0)$ 得 $0 = 2 + 2pq$，所以

$$pq = -1.$$

代入 S 的坐标：

$$S = (p^2 + q^2 + 2 + pq,\ -pq(p + q)) = (p^2 + q^2 + 1,\ p + q),$$

正如题目所求。同时留意，现在 $R = (-1,\ p + q)$，它位于直线 $x = -1$ 上，亦即准线（directrix）上。

$PSQR$ 是长方形

> ? **想一想** 要证明四个给定的点构成一个长方形，最干净利落的方法是甚么？

一条不错的路线是：先证明它是平行四边形（parallelogram）（对角线互相平分），再证明其中一只角是直角。

平行四边形。在 $PSQR$ 中，对角线是 PQ 和 SR。利用 $pq=-1$，

$$R+S=(pq+p^2+q^2+1,\ 2(p+q))=(p^2+q^2,\ 2p+2q)=P+Q,$$

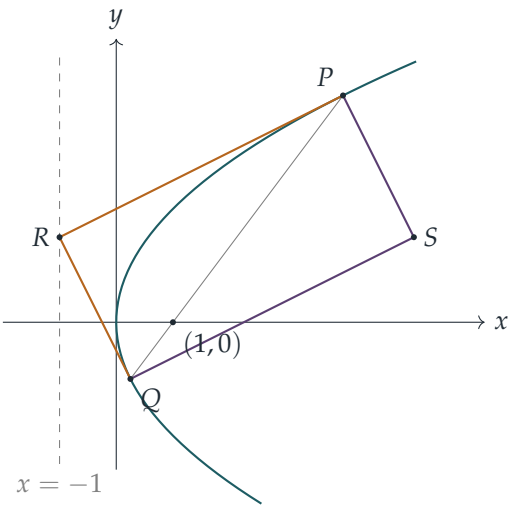
所以 RS 的中点等于 PQ 的中点。对角线互相平分，所以 $PSQR$ 是平行四边形。它是一个真正的平行四边形，而不是退化（degenerate）的：P、R 和 Q 并不共线（collinear），因为 R 同时位于两条切线上，而抛物线上两个不同点的切线只相交一次，并且任何一条都不会通过另一个切点。

一只直角。边 RP 和 RQ 分别沿着 P 和 Q 处的切线，斜率为 $\frac{1}{p}$ 和 $\frac{1}{q}$。它们的乘积是

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{pq}=-1,$$

所以两条切线互相垂直，角 PRQ 是直角。

有一只角是直角的平行四边形就是长方形，所以 $PSQR$ 是长方形。（等价的说法是：P 和 Q 处的角都是直角，因为每条法线都与自己的切线垂直；再加上 R 处的直角，第四只角也必定是直角。）



图中所示为 $p=2$、$q=-\frac{1}{2}$ 的情况：切线为琥珀色，法线为梅子色，焦点弦 PQ 为灰色。

验算

取 $p=2$、$q=-\frac{1}{2}$，于是 $pq=-1$。这时 $P=(4,4)$ 而 $Q=(\frac{1}{4},-1)$，通过这两点的直线 $y-4=\frac{4}{3}(x-4)$ 确实通过 $(1,0)$。由公式得 $R=(-1,\frac{3}{2})$ 和 $S=(\frac{21}{4},\frac{3}{2})$。直接验证：$\overrightarrow{RP}=(5,\frac{5}{2})$ 与 $\overrightarrow{QS}=(5,\frac{5}{2})$ 相等，而 $\overrightarrow{RQ}=(\frac{5}{4},-\frac{5}{2})$ 与 $\overrightarrow{RP}$ 的点积（dot product）是 $\frac{25}{4}-\frac{25}{4}=0$。所以 $PSQR$ 的确是长方形。我们亦以精确分数，就约二千组随机选取的 p 和 q 核对了所有坐标公式。

常见错误

- 除以 $p-q$ 而没有说明为何可以这样做；题目给出 $p \neq q$，正是为了让你可以这样做。
- 只证明了某一个角上的两条邻边互相垂直，单凭这一点并不足以构成长方形：你需要的是平行四边形加上一只直角，或者三个角都是直角。
- 忘记在 S 中使用 $pq=-1$：一般情况下法线的交点是 $\left(p^2+pq+q^2+2,\ -pq(p+q)\right)$，只有在焦点弦上它才会化简成题目给出的形式。

STEP 之外

通过焦点的弦称为*焦点弦*（focal chord），而本题证明了关于它的两个经典事实：弦两端的切线互相垂直，并且相交于准线上。两者都是圆锥曲线（conics）的极点与极线（poles and polars）理论的特殊情况，在这套理论中，准线就是焦点的极线；射影几何（projective geometry）令这类结果几乎不证自明。若想循这个方向探索处理圆锥曲线的参数方法，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（数学进阶难题集）是一个好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。