详细解答

STEP I 2005，第 11 题

力学 · 向量运动学

STEP I 2005，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/05-s1-q11

关键思路

这道题由始至终都在考两个向量(vector)$\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ 之间的相对位置。垂直(perpendicular)即纯量积（scalar product）$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ 等于零；平行（parallel）即“交叉”组合 $xv_y - yv_x$ 等于零。只要写出 $\sin 2t = 2\sin t \cos t$ 和 $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$，这两个式子都可以化简得十分整齐。至于求距离和绘画草图，把所有式子都用 $\cos t$ 表示，或者干脆消去 t，会方便得多。

解答

设 $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$，其中

$$x = \sin 2t = 2\sin t \cos t, \qquad y = 2\cos t, \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

求导后，得速度（velocity）为

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t)\,\mathbf{i} - (2\sin t)\,\mathbf{j}.$$

第 (i) 部分

当 $x = 0$ 且 $y = 0$ 时，质点（particle）位于原点。条件 $y = 0$ 即 $\cos t = 0$，所以在给定范围内 $t = \frac{\pi}{2}$ 或 $t = \frac{3\pi}{2}$。在这两个时刻，$x = 2\sin t \cos t = 0$ 自动成立。因此质点恰好在 $t = \frac{\pi}{2}$ 和 $t = \frac{3\pi}{2}$ 这两个时刻位于原点，其他时刻都不在原点，这正是要证明的结果。

第 (ii) 部分

当 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$ 时，速度与位移（displacement）垂直（两个向量都须非零，“垂直”才有意义）。现在

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= 2\sin 2t\cos 2t - 4\sin t\cos t\\ &= 2\sin 2t\cos 2t - 2\sin 2t\\ &= 2\sin 2t\,(\cos 2t-1)\\ &= -4\sin 2t\,\sin^2 t,\end{aligned}$$

其中用了 $\cos 2t-1=-2\sin^2 t$。当 $\sin 2t=0$ 或 $\sin t=0$ 时，此式等于零，即

$$t=0,\ \tfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

> **想一想** $t=\frac{\pi}{2}$ 和 $t=\frac{3\pi}{2}$ 真的应该列入答案吗?

不应该。由第 (i) 部分可知，在这两个时刻 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$，而零向量没有方向，所以说它与任何向量垂直都没有实质意义；纯量积等于零，只是出于一个平凡的原因。在 $t=0$ 时，$\mathbf{r}=2\mathbf{j}$ 而 $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$；在 $t=\pi$ 时，$\mathbf{r}=-2\mathbf{j}$ 而 $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$：这些才是真正互相垂直的非零向量。因此，速度与位移垂直的时刻是

$$t=0 \quad 和 \quad t=\pi.$$

第 (iii) 部分

首先，$\mathbf{v}$ 永不为零：若 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$，则必须 $\sin t=0$，但这时 $\cos 2t=1-2\sin^2 t=1\neq 0$。

两个非零向量 (x,y) 与 (v_x,v_y) 平行，当且仅当 $xv_y-yv_x=0$。这里

$$\begin{aligned}xv_y-yv_x &= \sin 2t\,(-2\sin t)-2\cos t\,(2\cos 2t)\\ &= -4\sin^2 t\cos t-4\cos t\,(1-2\sin^2 t)\\ &= -4\cos t\,(1-\sin^2 t)\\ &= -4\cos^3 t.\end{aligned}$$

此式只在 $\cos t=0$ 时等于零，而由第 (i) 部分可知，这只在质点位于原点时才会发生。所以只要质点不在原点，就有 $\cos t\neq 0$，这个组合不等于零，速度亦不与位移平行。证明至此完成。

第 (iv) 部分

设 $c=\cos^2 t$，则 $0\le c\le 1$。于是

$$|\mathbf{r}|^2=\sin^2 2t+4\cos^2 t=4\sin^2 t\cos^2 t+4\cos^2 t=4c(1-c)+4c=4c(2-c).$$

二次式 $4c(2-c)$ 的顶点在 $c=1$，并在 $[0,1]$ 上递增，所以它在这个区间上的最大值在 $c=1$ 处取得，这时 $|\mathbf{r}|^2=4$。因此质点与原点的最大距离是

$$|\mathbf{r}|_{\max}=2,$$

在 $\cos^2 t=1$ 时达到，即 $t=0$ 和 $t=\pi$，对应的点是 $(0,\pm2)$。这正好是第 (ii) 部分求得的时刻，令人安心：距离达到最大值时，速度的径向分量（radial component）必定为零。

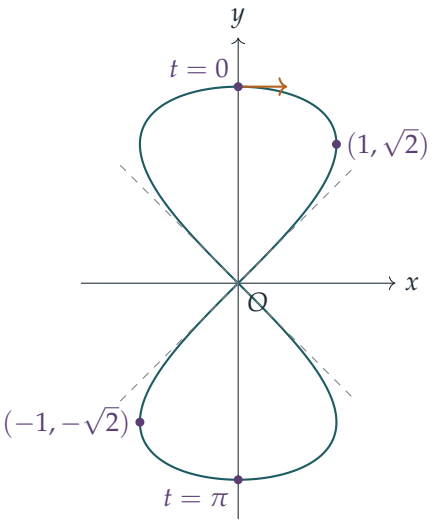
至于草图，先消去 t。由于 $x=y\sin t$ 及 $\sin^2 t=1-\cos^2 t=1-\frac{1}{4}y^2$，

$$x^2=y^2\Big(1-\frac{y^2}{4}\Big),\qquad \text{即}\qquad 4x^2=y^2(4-y^2).$$

草图上应显示以下特征：

- 曲线对两条坐标轴都对称，且 $-2\le y\le 2$。
- $|x|=|\sin 2t|\le 1$，当 $y=\pm\sqrt{2}$ 时 $|x|=1$。
- 在原点附近 $4x^2\approx 4y^2$，所以曲线在该处沿直线 $y=\pm x$ 自相交。这与 $t=\frac{\pi}{2}$ 时的速度 $-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ 及 $t=\frac{3\pi}{2}$ 时的速度 $-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ 吻合。
- 在 $(0,\pm2)$ 处路径是水平的，正如第 (ii) 部分所示。

随着 t 增加：质点从 $(0,2)$ 出发，沿 $+\mathbf{i}$ 方向运动，顺着上方环圈的右边下行至原点，再绕下方环圈一周（先走左边）回到原点，最后沿上方环圈的左边上行。整条路径是一个 8 字形。



验算

- 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 时：$\mathbf{r} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$，满足 $4x^2 = 4 = y^2(4 - y^2) = 2 \cdot 2$，而 $|\mathbf{r}| = \sqrt{3} < 2$，与 $4c(2 - c) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3$ 一致。
- 在 $[0, 2\pi)$ 上对 t 作细密取样，得最大距离为 2.000，距离接近零的情况只出现在 $t \approx 1.57$ 和 4.71，并且在随机选取的时刻验证了恒等式 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = -4 \sin 2t \sin^2 t$ 和 $xv_y - yv_x = -4\cos^3 t$。最小速率约为 1.32，所以 $\mathbf{v}$ 永不为零。

常见错误

- 在第 (ii) 部分把 $t = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 列入答案：纯量积在这两个时刻等于零，只是因为 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$。
- 在第 (iii) 部分忘记验证 $\mathbf{v}$ 永不为零；零速度会与任何向量“平行”。
- 把两个环圈画成左右并排：这个 8 字是直立的，两个环圈分别在原点的上方和下方，因为 y 的范围是 $[-2, 2]$，而 x 的范围只有 $[-1, 1]$。

STEP 之外

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2$ 和 $xv_y - yv_x$ 这两个量，分别是运动的径向部分和（每单位质量计）对原点的角动量（angular momentum）；在极坐标（polar coordinates）中，后者就是 $r^2\dot{\theta}$。第 (iii) 部分说明角动量只在原点处为零，所以质点从不沿直线直接趋向或远离 O。这条曲线本身就是 Gerono 双纽线（lemniscate of Gerono），是众多经典 8 字形曲线之一。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种思路阐述极坐标和角动量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。