详细解答

STEP I 2005，第 10 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP I 2005，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

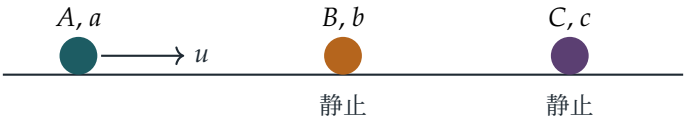
step.maths.org/questions/05-s1-q10

关键思路

每一次碰撞都是两个光滑质点（particle）之间的直接碰撞（direct impact），因此可得两条方程：沿直线方向的动量守恒（conservation of momentum），以及牛顿实验定律（Newton's experimental law）（分离速率 $= e\times$ 接近速率）。只要对一般的一对质点解一次这两条方程，所得公式便可在第二次碰撞中重复使用。至于各个特殊情况，真正的问题是：两次碰撞之后，事情是否就此结束？题目要求的是最终速度，所以必须检查没有任何质点会追上前面的那一个。

解答

我们把 A、B、C 视为在光滑平面上沿同一直线运动的质点，因此没有水平方向的外力作用，每次碰撞中沿直线方向的动量都守恒。取 u 的方向为正。设 p 为 A 与 B 碰撞后的速度，q 为 B 与 C 碰撞后的速度。



第一次碰撞：求 v

碰撞前 A 的速度为 u，而 B 静止；碰撞后两者的速度分别为 p 和 v。由动量守恒和牛顿定律得

$$au = ap + bv, \qquad v - p = eu.$$

把 $p = v - eu$ 代入第一条方程，得 $au = av - aeu + bv$，所以

$$v = \frac{a(1+e)u}{a+b}, \qquad p = v - eu = \frac{(a-eb)u}{a+b}.$$

留意 $v > 0$，所以 B 确实朝着 C 运动。

第二次碰撞：求 w

这与刚才的情况相同，只是换成 B（质量 b，速率 v）撞向 C（质量 c，静止）。因此可以重用上面的公式，作代换 $a \to b$、$b \to c$、$u \to v$：

$$w = \frac{b(1+e)v}{b+c}, \qquad q = \frac{(b-ec)v}{b+c}.$$

代入 v 的表达式，

$$w = \frac{b(1+e)}{b+c} \cdot \frac{a(1+e)u}{a+b} = \frac{abu(1+e)^2}{(a+b)(b+c)},$$

正如所求。

这两次碰撞之后，各质点的速度为 p、q、w。只有当 $p > q$（A 追上 B）或 $q > w$（B 追上 C）时，才会再有碰撞；由牛顿定律，$q - w = -ev < 0$，所以后者永不发生，我们只需比较 p 和 q。

> ? **想一想** 为甚么不能在两次碰撞之后就停下来，直接写出 p、q、w 作为答案?

因为题目问的是最终速度。假如之后 A 仍然比 B 快，它便会再次撞上 B，一切都会随之改变。所以在每种情况下，我们都必须检查 $p \le q$。

第 (i) 部分

这里 $a = eb$ 及 $b = ec$（其中 $e > 0$，因为质量为正数）。于是 $a - eb = 0$ 及 $b - ec = 0$，所以

$$p = 0, \qquad q = 0.$$

至于 w，利用 $a + b = b(1+e)$ 及 $b + c = b + b/e = b(1+e)/e$：

$$w = \frac{eb \cdot b\,u(1+e)^2}{b(1+e) \cdot b(1+e)/e} = e^2 u.$$

A 和 B 都静止，而 C 向前离去，所以不会再有碰撞。最终速度为

$$A:\ 0, \qquad B:\ 0, \qquad C:\ e^2 u.$$

每次碰撞都把全部动量传给下一个质点，就像一个牛顿摆（Newton's cradle），只是后面的质点较轻。

第 (ii) 部分

现在 $b = ea$ 及 $c = eb = e^2a$。于是

$$v = \frac{a(1+e)u}{a(1+e)} = u, \qquad p = \frac{(a-e^2a)u}{a(1+e)} = (1-e)u,$$

当中用了 $1-e^2 = (1-e)(1+e)$。在第二次碰撞中，质量 b、c 之比与 a、b 之比相同，而 B 以速率 u 到达，所以它完全是第一次碰撞的翻版：

$$w = u, \qquad q = (1-e)u.$$

（直接计算：$w = \dfrac{a \cdot ea \cdot u(1+e)^2}{a(1+e) \cdot ea(1+e)} = u$。）

现在 $p = q$，所以 A 永远追不上 B；而当 $e > 0$ 时 $q = (1-e)u < u = w$，所以 B 永远追不上 C。最终速度为

$$A:\ (1-e)u, \qquad B:\ (1-e)u, \qquad C:\ u,$$

全部沿 A 原来的运动方向。

验算

- (ii) 的动量：$a(1-e)u + ea(1-e)u + e^2a\,u = au$。(i) 的动量：$c \cdot e^2u = e^2c\,u = au$。
- 在 (ii) 中取 $e = 1$（完全弹性，perfectly elastic），A 和 B 最终静止，而 C 以 u 离去；动能（kinetic energy）守恒：$\frac{1}{2}au^2 = \frac{1}{2}cu^2$ 需要 $c = a$，这正是 $c = e^2a$ 在 $e = 1$ 时的情况。
- 一个数值例子：取 $e = \frac{1}{2}$，质量为 $1, 2, 4$ 及 $u = 1$（第 (i) 部分），最终速度为 $0, 0, \frac{1}{4}$；质量为 $4, 2, 1$（第 (ii) 部分）则得 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$。我们以精确算术，对数以千计随机选取的质量和 e 值，并模拟其后可能出现的任何碰撞，验证了这些结果以及 v 和 w 的一般公式。

常见错误

- 写牛顿定律时把速度的次序弄反：正确的是碰撞后的（前方质点的速率 − 后方质点的速率）$= e \times$ 碰撞前的（后方 − 前方）。
- 直接写出两次碰撞后的速度，而没有检查 A 会否再次追上 B。

STEP 之外

连串碰撞是描述动量和能量如何在物料中传递的最简单模型，而第 (i) 部分的质量比经过特意选取，使全部动量最终都落在最后一个质点上。若把质量的次序倒过来，重的在

后、轻的在前，并且 e 接近 1，最后一个质点便会比第一个质点运动得更快：这正是那个玩具背后的原理——把一个小球叠在一个大球上，让两者一同落下，小球便会高高弹上半空。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）以质心参考系（centre-of-mass frame）处理碰撞，令 v 和 w 这类公式变得几乎一目了然。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。