详细解答

STEP I 2005，第 1 题

纯数学 · 数字和的计数

> **STEP I 2005，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q1

关键思路

五位数的数字和（digit sum）最大可能是 $9 \times 5 = 45$，而题目要求的两个数字和都很接近这个值。因此，与其直接数各个数字本身，不如数每个数字比 9 少了多少。这些差额（shortfall）都是很小的非负数，总和又是一个固定的小数目，数起来十分容易：既可以逐一列出各种情况，也可以用“星与棒”法（stars and bars）。

解答

把这个数写成 $d_1d_2d_3d_4d_5$，其中 $d_1 \in \{1,\ldots,9\}$（首位不能是零），而 $d_2,\ldots,d_5 \in \{0,\ldots,9\}$。设

$$e_i = 9 - d_i \qquad (i = 1,\ldots,5),$$

即第 i 个数字的*差额*。每个 e_i 都是整数，且 $0 \le e_i \le 9$（并且 $e_1 \le 8$，因为 $d_1 \ge 1$），而

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 45 - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5).$$

不同的数给出不同的序列 $(e_1,\ldots,e_5)$，反之亦然，所以数算数字和为 S 的数，等同于数算总和为 $45 - S$ 的有序差额序列。

第 (i) 部分

数字和为 43，即差额的总和是 $45 - 43 = 2$。把 2 分拆成非负部分只有两种方法：

- **一个数字少了 2，其余少了 0**。一个数字是 7，其余四个是 9。这个 7 可以放在 5 个位置中的任何一个：共 5 个数（$79999, 97999, \ldots, 99997$）。
- **两个数字各少了 1，其余少了 0**。两个数字是 8，其余三个是 9。我们从 5 个位置中选

出 2 个来放 8：共 $\binom{5}{2} = 10$ 个数（88999, 89899, . . . , 99988）。

每个数字都至少是 7，所以首位数字绝不会是 0，以上各数确实都是五位数。这两种情况互不重叠，并且涵盖了所有可能，所以共有

$$5 + 10 = 15$$

个五位数的数字和为 43，正如题目所求。

第 (ii) 部分

现在差额的总和必须是 $45 - 39 = 6$。由于 $6 \leq 8$，没有任何一个差额会超出其上限：$e_1 \leq 6 \leq 8$ 保证 $d_1 \geq 3$，而 $e_i \leq 6 \leq 9$ 保证其余数字都在 3 与 9 之间。所以我们只需求出下式的有序解的数目：

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 6, \qquad e_i \geq 0 \text{ 且为整数.}$$

想一想 怎样才可以不用逐一列出而数出这些解?

想像把 6 颗星排成一行，用 4 根棒把它们分成 5 组：

$$\star\star \,|\, |\, \star \,|\, \star\star\star \,|\quad \text{代表} \quad (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (2, 0, 1, 3, 0).$$

6 颗星和 4 根棒的每一种排列都恰好给出一个解，而每一个解也恰好来自一种排列。只要选定 10 个位置中哪 4 个放棒，排列便随之确定，所以解的数目是

$$\binom{10}{4} = 210.$$

因此，共有 **210** 个五位数的数字和为 39。

如果你宁愿像第 (i) 部分那样分情况来数，可以列出把 6 分拆成最多五个正数部分的所有方法，再数出每种方法的排列数目：

差额	数的个数	差额	数的个数
6	5	3, 2, 1	$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
5, 1	$5 \cdot 4 = 20$	3, 1, 1, 1	$5 \cdot 4 = 20$
4, 2	$5 \cdot 4 = 20$	2, 2, 2	$\binom{5}{2} = 10$
4, 1, 1	$5 \cdot \binom{4}{2} = 30$	2, 2, 1, 1	$\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$
3, 3	$\binom{5}{2} = 10$	2, 1, 1, 1, 1	5

总数是 $5 + 20 + 20 + 30 + 10 + 60 + 20 + 10 + 30 + 5 = 210$，与星与棒法的结果一致。（6 的分拆（partition）1, 1, 1, 1, 1, 1 需要六个数字，所以不会出现。）

验算

- 星与棒法可重现第 (i) 部分的结果：差额总和为 2 时，得 $\binom{6}{4} = 15$。
- 极端情况同样成立：差额总和为 0 时，得 $\binom{4}{4} = 1$ 个数（99999）；差额总和为 1 时，得 $\binom{5}{4} = 5$。
- 用电脑搜索全部 90 000 个五位数，结果恰好有 15 个数的数字和为 43，210 个数的数字和为 39，而各种情况的分布亦与上表相符。

常见错误

- 把 $\{8,8,9,9,9\}$ 当作一个数，或当作 5 个数：数字的次序是有分别的，共有 $\binom{5}{2} = 10$ 种排列。
- 忘记检查首位数字。本题的首位不可能是 0，因为每个数字都至少是 3；但如果数字和较小（例如 20），星与棒法便会多算，这时必须剔除 $d_1 = 0$ 或有数字大于 9 的情况。

STEP 之外

把 n 写成 k 个非负整数的有序和，方法的数目是 $\binom{n+k-1}{k-1}$，这也是 $(1 + x + x^2 + \cdots)^k$ 中 x^n 的系数（coefficient）。若限制每个数字最大为 9，上式便要换成 $(1 + x + \cdots + x^9)^k$，而截断所带来的影响可用容斥原理（inclusion–exclusion principle）处理。这些生成函数（generating function）方法是大学一年级组合数学（combinatorics）的基本内容；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 和 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 都是继续探索数字与计数问题的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。