详细解答

STEP III 2004，第 9 题

力学 · 力矩与摩擦力

> **STEP III 2004，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q9

关键思路

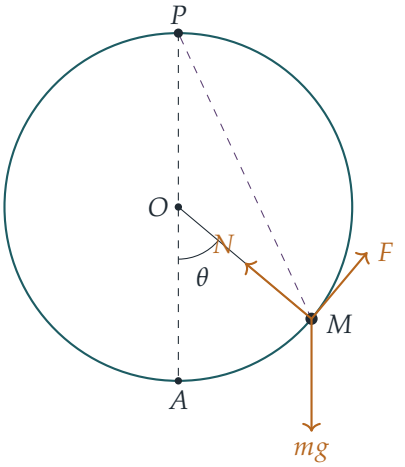
圆环的重量作用于转轴正下方的 O，因此对 P 没有力矩（moment）。除了转轴处的反作用力之外，圆环所受的另一个力就只有老鼠施加的接触力（contact force），所以圆环保持不动，当且仅当这个接触力对 P 的力矩为零，也就是它的作用线（line of action）通过 P。整道题其实只在问：老鼠所受的接触力何时可以沿 MP 的方向？这个问题要问两次，一次求速率，一次求摩擦力的极限。

解答

模型

把老鼠视为质量为 m 的质点（particle），把圆环视为刚性（rigid）圆环（稍后可见它的质量并不影响结果），圆环可绕通过 P 的光滑水平轴自由转动。设 $\theta = \angle AOM$，由向下的铅垂线起量度，老鼠朝 θ 递增的方向奔跑。圆环静止时，老鼠在一个半径为 a、圆心为 O 的固定圆上以恒定速率 u 运动。

老鼠所受的力有：重量 mg、圆环施加并指向 O 的法向反作用力（normal reaction）N，以及沿切线方向的摩擦力（friction）F，我们取 θ 递增的方向（沿圆环向上）为正。



对老鼠沿切线方向（速率恒定，故没有切向加速度）和沿半径方向（加速度为 u^2/a，指向 O）分解：

$$F = mg\sin\theta,$$
$$N - mg\cos\theta = \frac{mu^2}{a}.$$

圆环何时处于平衡?

根据牛顿（Newton）第三定律，老鼠推圆环的力，与老鼠所受的接触力（N 和 F）大小相等、方向相反。圆环的重量作用于 O，位于 P 的正下方，而转轴的反作用力作用于 P，所以两者对 P 都没有力矩。因此，圆环保持平衡（equilibrium）且 POA 铅垂，当且仅当接触力对 P 的力矩为零，也就是它的作用线通过 P。

三角形 OPM 是等腰三角形（$OP = OM = a$），且 $\angle POM = \pi - \theta$，所以 $\angle OMP = \frac{1}{2}\theta$。于是直线 MP 与半径 MO 的夹角为 $\frac{1}{2}\theta$，并偏向 θ 递增的一方。因此，老鼠所受的接触力沿 MP 的方向，当且仅当

$$\frac{F}{N} = \tan\tfrac{1}{2}\theta. \qquad (*)$$

（等价地，直接对 P 取力矩，老鼠施于圆环的力的力矩为 $a[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)]$，而 $\sin\theta/(1+\cos\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta$。）

? **想一想** 怎样把这个条件化为关于 u 的条件?

利用运动方程。老鼠所受的接触力等于质量乘以加速度，再减去重量：

$$\mathbf{R} = m\cdot\frac{u^2}{a}\,\widehat{MO} + mg\,\widehat{\text{上}}.$$

但 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} = a\,\widehat{MO} + a\,\widehat{上}$，两个系数相等。所以 $\mathbf{R}$ 平行于 MP 对每个 θ 都成立，当且仅当 $u^2/a = g$，即

$$u = \sqrt{ag}.$$

用代数方法：当 $u^2 = ag$ 时，运动方程给出 $F = mg\sin\theta$ 和 $N = mg(1+\cos\theta)$，所以

$$\frac{F}{N} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

这正是 $(*)$。对于一般的速率，对 P 的力矩算出来是 $m\sin\theta\,(u^2 - ag)$，它在每个位置都等于零，当且仅当 $u^2 = ag$。所以老鼠以速率 $\sqrt{ag}$ 奔跑，就能令圆环保持平衡，正如题目所要求，前提是圆环确实能够提供所需的摩擦力。接下来我们就考察这一点。

摩擦力的极限

只有当 $|F| \le \mu N$ 时，老鼠的脚才能抓紧而不打滑。取 $u = \sqrt{ag}$，并考虑圆环的下半部分，该处 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$，故 $\cos\frac{1}{2}\theta > 0$，这个条件就是

$$\tan\tfrac{1}{2}|\theta| \le \mu \quad\Longleftrightarrow\quad |\theta| \le 2\arctan\mu.$$

所以在 $\angle AOM = 2\arctan\mu$ 之前，一切都行得通。（只有当 $\mu < 1$ 时，这一点才位于圆环的下半部分；若 $\mu \ge 1$，老鼠永远到不了这一点。）

过了这一点，无论选甚么速率都无补于事。平衡需要 $F/N = \tan\frac{1}{2}\theta > \mu$，而摩擦力无法做到。不论速率是多少，只要摩擦力满足 $|F| \le \mu N$，老鼠施于圆环的力对 P 的力矩都是

$$a[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)] \;\ge\; aN(1+\cos\theta)(\tan\tfrac{1}{2}\theta - \mu) > 0.$$

会发生甚么事

老鼠一旦越过 $\angle AOM = 2\arctan\mu$，就再也抓不够紧。牠的脚开始打滑，摩擦力降至极限值（limiting value）μN，老鼠无法维持原有速率：牠开始向后滑。这时牠施于圆环的接触力从 P 的旁边经过，因而力矩不为零，圆环不再处于平衡。圆环开始绕 P 转动。上面那个力矩的方向表明，老鼠的法向推力胜过已减弱的摩擦力，所以圆环摆动时，A 会移向老鼠所在的一侧，也就是老鼠原本奔跑的方向。从这一刻起，运动不再是简单的平衡情况：圆环绕 P 摆动，而老鼠则在圆环上滑动。

验算

- 当 $\theta = 0$ 时，老鼠位于 A，接触力 $N = 2mg$ 是铅垂的，并通过 P，而且不需要摩擦力，与预期相符。
- 速率 $\sqrt{ag}$ 具有速率的单位，既不取决于 μ，也不取决于圆环的质量，而且它令法向反作用力等于 $mg(1+\cos\theta)$，在整个下半部分都是正数。

- 当 $\mu = 0.5$ 时，临界角为 $2\arctan 0.5 \approx 0.927$ 弧度 $\approx 53.1^\circ$。在该处 $\sin\theta = 0.8$，$1 + \cos\theta = 1.6$，所以 $F/N = 0.5 = \mu$，恰好相等。以 $u^2 = ag$ 在随机位置对 P 的力矩作数值检验，结果为零，误差在 $10^{-15}mga$ 以内。

常见错误

- 对 O 而不是对 P 取力矩。圆环是绕 P 转动的，而法向反作用力（它通过 O）对 P 确实有力矩。
- 漏掉 N 中的向心（centripetal）项，结果得出 $N = mg\cos\theta$ 和错误的摩擦力条件。
- 声称老鼠只是“掉下来”。在下半部分，$N > 0$ 始终成立。失效的是抓地力，而不是接触。

STEP 之外

这里的巧妙之处在于：一个物体绕枢轴（pivot）处于平衡，当且仅当其余各力的合力（resultant）通过枢轴。“作用线通过 P”这个论证，省去了一整页的分解计算。题目的后半部分则让人初尝耦合系统（coupled systems）的滋味：打滑的接触把一个物体的运动传到另一个物体上。要分析打滑之后的运动，就需要圆环的转动惯量（moment of inertia）和完整的刚体转动方程。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种风格讲解绕固定轴的力矩（torque）和受摩擦力限制的运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。