详细解答

STEP III 2004，第 8 题

纯数学 · 微分方程

> **STEP III 2004，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q8

关键思路

由于有 $1/y$ 这一项，方程对 y 而言并非线性（linear）。但把方程两边同乘 y 后，$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 就变成 y^2 的导数的一半，而 $1/y$ 项则变成纯粹是 x 的函数。因此以 $u = y^2$ 表示时，方程是线性的（这是一条伯努利型（Bernoulli type）方程），再用积分因子（integrating factor）便可完成求解。三条曲线都是圆锥曲线（conics），辨认出它们之后，作图就很容易。

解答

代换

设 $u = y^2$。由链式法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\left(f(x)\,y + \frac{g(x)}{y}\right) = 2f(x)\,y^2 + 2g(x).$$

以 u 取代 y^2，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2f(x)\,u = 2g(x),$$

这对 u 而言是线性的：u 和 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 都只以一次幂出现，而系数只取决于 x。这正是我们要证明的。

解方程

这里 $f(x) = \frac{1}{x}$ 而 $g(x) = -1$，所以线性方程是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}\,u = -2.$$

积分因子是 $\exp\left(-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-2\ln|x|} = \dfrac{1}{x^2}$。把方程两边同乘这个因子，

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x^3}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

积分后得 $\dfrac{u}{x^2} = \dfrac{2}{x} + C$，其中 C 为常数，所以通解（general solution）是

$$y^2 = 2x + Cx^2.$$

（原方程要求 $x \neq 0$ 及 $y \neq 0$，所以每个解都定义在一个不含 0 的 x 区间上，在该区间上 $2x + Cx^2 > 0$，而且 y 始终保持同一符号。）

三条曲线

三个点都满足 $x > 0$ 及 $y > 0$，所以每条解曲线（solution curve）都是 $y^2 = 2x + Cx^2$ 在包含该点的正 x 区间上 $y > 0$ 的那一部分。

通过 $(1,1)$：$1 = 2 + C$，所以 $C = -1$，$y^2 = 2x - x^2$。配方后得

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

即圆心为 $(1,0)$、半径为 1 的圆。解曲线是上半圆 $y = \sqrt{2x - x^2}$，其中 $0 < x < 2$。

通过 $(2,2)$：$4 = 4 + 4C$，所以 $C = 0$，$y^2 = 2x$：这是顶点在原点、对称轴沿 x 轴的抛物线。解曲线是 $y = \sqrt{2x}$，其中 $x > 0$。

通过 $(4,4)$：$16 = 8 + 16C$，所以 $C = \frac{1}{2}$，$y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$。配方后得 $\frac{1}{2}(x+2)^2 - y^2 = 2$，即

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1,$$

这是一条双曲线，中心为 $(-2,0)$，顶点为 $(0,0)$ 和 $(-4,0)$，渐近线（asymptotes）为 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$。解曲线是右支的上半部分，$y = \sqrt{2x + \frac{1}{2}x^2}$，其中 $x > 0$。

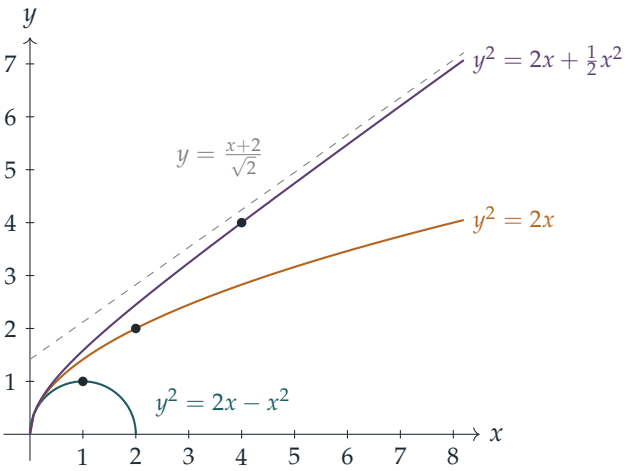
> ? **想一想** 为甚么不包括双曲线的左支，或者各曲线的下半部分?

微分方程的解必须在某个区间上可导，并在该区间上满足方程，而方程在 $x = 0$ 或 $y = 0$ 时没有定义。从 $(4,4)$ 出发向左走，曲线会到达 $(0,0)$，在那里两个条件都不成立，所以解不能延拓过这一点。左支（$x \leq -4$）和下半部分虽然满足 $y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$，但它们是另外的解，并不是通过 $(4,4)$ 的那一个。

略图

三条曲线都从原点出发，在该处的切线是铅垂的（在 $x = 0$ 附近，每条曲线的表现都近似 $y \approx \sqrt{2x}$），而在所给各点的斜率分别是 $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$、$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 和 $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$。当 x 较大时，

圆会回落到 $(2,0)$，抛物线按 $\sqrt{x}$ 的速度增长，而双曲线则趋近其渐近线 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$。由于当 $x>0$ 时 $2x-x^2<2x<2x+\frac{1}{2}x^2$，圆位于抛物线之下，而抛物线又位于双曲线之下。



验算

- 代回原方程：若 $y^2=2x+Cx^2$，则 $2yy'=2+2Cx$，所以 $y'=\frac{1+Cx}{y}$，而 $\frac{y}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y^2-x}{xy}=\frac{x+Cx^2}{xy}=\frac{1+Cx}{y}$。两者一致。
- 用数值方法（龙格—库塔法（Runge–Kutta））对原方程由 $(4,4)$ 逐步计算至 $x=8$，得 $y\approx 6.92820$，与 $\sqrt{16+32}=\sqrt{48}$ 吻合；由 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 出发作类似计算，结果与半圆和抛物线吻合，误差约为 10^{-12}。

常见错误

- 把积分因子写成 x^2 而不是 x^{-2}：u 的系数是 $-\frac{2}{x}$，所以指数是 $-2\ln x$。
- 漏掉 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 中的因子 2，结果得出 $y^2=x+Cx^2$；这通不过代回原方程的验算。
- 把整个圆、抛物线的上下两半或双曲线的两支都画出来，当作“解曲线”。

STEP 之外

这里的技巧适用于任何*伯努利方程*（Bernoulli equation）$y'=f(x)y+g(x)y^n$：代换 $u=y^{1-n}$ 总能把它化为线性方程（这里 $n=-1$，所以 $u=y^2$）。在 $x=0$ 和 $y=0$ 处所需的谨慎，让我们初次窥见存在与唯一性定理（existence and uniqueness theorem）：凡在

右边表现良好的点，都有且仅有一个解通过，而曲线族只能在右边表现不良好的点相交，正如我们的所有曲线都在原点相交一样。Boyce 与 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）涵盖了伯努利方程和这个定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。