详细解答

STEP III 2004，第 7 题

纯数学 · 归约公式

STEP III 2004，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q7

关键思路

I_{n+1} 的被积函数（integrand）等于 I_n 的被积函数乘以 $\frac{t}{t+1}$，所以只要估计这一个因子的上界（upper bound），就能得到联系相邻两个积分的不等式。分部积分法（integration by parts）也给出一个精确的关系式；把不等式与等式并排放在一起，就能挤出一个只涉及 I_n 的上界。这个精确的关系式可以逐项相消（telescope），一直化到 I_1，而它是我们熟悉的对数；于是整件事就变成 $\ln 2$ 的一个级数（series），而且误差项在我们掌握之中。

解答

不等式 $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$

在 $0 \le t \le 1$ 上，

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1},$$

它随 t 递增，所以最大值是 $\frac{1}{2}$，而且只在 $t = 1$ 时取得。现在把 I_{n+1} 的被积函数写成

$$\frac{t^n}{(t+1)^{n+1}} = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n}.$$

因此

$$\frac{1}{2} I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{t+1} \right) \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n} \, \mathrm{d}t.$$

这里的被积函数是连续（continuous）的，永不为负，而且在 $0 < t < 1$ 时严格为正（两个因子在该处均为正）。所以这个积分严格为正，即 $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$。

? **想一想** 既然 $\frac{t}{t+1}$ 确实会达到 $\frac{1}{2}$，为甚么不等式仍然是严格的?

它只在 $t=1$ 这一点达到 $\frac{1}{2}$。一个连续的非负函数，只要在整个区间上为正，其积分就是正数，所以单单一点取等号并无影响。

递推关系

对 I_{n+1} 作分部积分，取 $u=t^n$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(t+1)^{-(n+1)}$，于是 $v=-\dfrac{1}{n(t+1)^n}$（因为 $n\geq 1$，此式成立）：

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[-\frac{t^n}{n(t+1)^n}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{n(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n\,2^n} + I_n, \end{aligned}$$

这是因为方括号内的式子在 $t=1$ 时等于 $-\frac{1}{n2^n}$，在 $t=0$ 时等于 0。这就是所要求的结果，即题目中的递推关系（recurrence）。

I_n 的上界

把递推关系代入不等式：

$$I_n - \frac{1}{n\,2^n} = I_{n+1} < \frac{1}{2}I_n \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}I_n < \frac{1}{n\,2^n} \quad\Longrightarrow\quad I_n < \frac{1}{n\,2^{n-1}}.$$

$\ln 2$ 的级数

首先，

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2.$$

递推关系指出，对每个 $r\geq 1$ 都有 $I_r - I_{r+1} = \dfrac{1}{r\,2^r}$。把 $r=1,\ldots,n$ 的各式相加，左边逐项相消：

$$I_1 - I_{n+1} = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r\,2^r}, \qquad \text{所以} \qquad \ln 2 = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r\,2^r} + I_{n+1}.$$

上下界 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$

关于余项（remainder），我们知道两件事：$I_{n+1}>0$，因为它的被积函数在 $(0,1]$ 上为正；以及 $I_{n+1} < \dfrac{1}{(n+1)2^n}$，这是把上文的上界中的 n 换成 $n+1$ 而得。所以对每个 n，

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r\,2^r} < \ln 2 < \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r\,2^r} + \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

部分和（partial sums）依次为

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}, \qquad \frac{5}{8}+\frac{1}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

想一想 求上界和下界时，各应取哪个 n 值?

两者并不相同。求下界（lower bound）时取 $n=3$：$\ln 2 > \frac{2}{3}$。求上界时取 $n=2$，此时误差的上界是 $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$：

$$\ln 2 < \frac{5}{8}+\frac{1}{12}=\frac{15}{24}+\frac{2}{24}=\frac{17}{24}.$$

合起来便得 $\frac{2}{3}<\ln 2<\frac{17}{24}$，正是所求。

验算

以数值计算，$\ln 2 \approx 0.6931$，确实介乎 $\frac{2}{3}\approx 0.6667$ 与 $\frac{17}{24}\approx 0.7083$ 之间。用辛普森法则（Simpson's rule）可得 $I_3 \approx 0.0681$，明显小于上界 $\frac{1}{12}\approx 0.0833$，而且 $\frac{5}{8}+0.0681=0.6931$ 亦确实成立。我们也用数值方法验算了递推关系和两个不等式，n 的取值直至 24。

常见错误

- 求上下界时用同一个 n：取 $n=3$ 会得到上界 $\frac{2}{3}+\frac{1}{32}=\frac{67}{96}$，这个上界是对的，而且更精确，但并不是题目要求的 $\frac{17}{24}$。
- 分部积分时弄错边界项的正负号；v 是负的。
- 忘记说明为甚么 $I_{n+1}>0$，而严格的下界正需要这一点。

STEP 之外

这就是级数 $\ln 2=\sum_{r\geq 1}\frac{1}{r2^r}$，亦即 $-\ln(1-x)=\sum x^r/r$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 时的情况，并且附有取 n 项之后余项的明确上界。用积分来估计余项，正是带积分余项的泰勒定理（Taylor's theorem）的做法，那是大学一年级分析课的基本内容。关于幂级数（power series）及其余项的理论，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。