详细解答

STEP III 2004，第 6 题

纯数学 · 递推关系

STEP III 2004，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q6

关键思路

F_n 这个式子是附在数列每一对相邻两项上的量，而开首的恒等式（identity）正好告诉我们，由一对相邻项到下一对时，它在甚么情况下保持不变。对于 (i) 中的递推关系（recurrence），第二个因式为零，所以 F_n 是一个不变量（invariant），我们只需求出它在起点的值。第 (ii) 部分把论证倒过来做：若 F_n 是常数，乘积必定为零，所以每一步两个因式之中总有一个是零。于是每一步都有一个选择，而周期（period）为 4 的数列（sequence）就是靠选得巧妙而得出的。

解答

恒等式

把两项都写出来，w_{n-1}^2 项互相抵消：

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= (w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}) - (w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - 4w_{n-1}w_{n-2}) \\ &= (w_n^2 - w_{n-2}^2) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2}) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2} - 4w_{n-1}), \end{aligned}$$

此式对 $n \geq 2$ 成立（因为需要 w_{n-2} 存在），正是所求。

还有一点观察，往后会一直用到：F_n 对 w_n 和 w_{n-1} 是对称（symmetric）的。把两者对调，$w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}$ 保持不变。

第 (i) 部分

取 $w_n = u_n$，并设 F_n 为相应的量。当 $n \geq 2$ 时，递推关系给出 $u_n + u_{n-2} - 4u_{n-1} = 0$，所以恒等式中的第二个因式为零，于是

$$F_n = F_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

因此对所有 $n \geq 1$ 都有 $F_n = F_1$，而

$$F_1 = u_1^2 + u_0^2 - 4u_1u_0 = 4 + 1 - 8 = -3.$$

所以 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$，即对所有 $n \geq 1$ 都有 $u_n^2 + u_{n-1}^2 = 4u_nu_{n-1} - 3$，正是所求。（这个数列是 $1, 2, 7, 26, 97, \ldots$。）

第 (ii)(a) 部分

把 $n = 1$ 和 $v_0 = 1$ 代入 $(*)$：

$$v_1^2 + 1 = 4v_1 - 3 \iff v_1^2 - 4v_1 + 4 = 0 \iff (v_1 - 2)^2 = 0,$$

所以 $v_1 = 2$。这里没有选择的余地，因为它是重根（repeated root）。

现在取 $w_n = v_n$。条件 $(*)$ 说的正是：对所有 $n \geq 1$，$F_n = -3$。所以当 $n \geq 2$ 时，F_n 和 F_{n-1} 都等于 -3，由恒等式得

$$0 = F_n - F_{n-1} = (v_n - v_{n-2})(v_n + v_{n-2} - 4v_{n-1}).$$

两个实数的乘积为零，仅当其中一个为零，所以 $v_n = v_{n-2}$ 或 $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}$，正是所求。

> ? **想一想** 这样就完了吗？两个选项是否真的都给出合乎条件的下一项？

是的。固定 v_{n-1}，条件 $(*)$ 就是以 $x = v_n$ 为未知数的二次方程（quadratic）$x^2 - 4v_{n-1}x + (v_{n-1}^2 + 3) = 0$。我们知道 $x = v_{n-2}$ 是一个根，因为 F 是对称的，而且 $F_{n-1} = -3$。两根之和为 $4v_{n-1}$，所以另一个根是 $4v_{n-1} - v_{n-2}$。因此 (a) 中的两个选项恰好就是这两个根。每一步我们都可以任选其一，所得结果总是满足 $(*)$。（当两根重合时，例如 $n = 1$ 的情况，就只有一个选项。）

第 (ii)(b) 部分

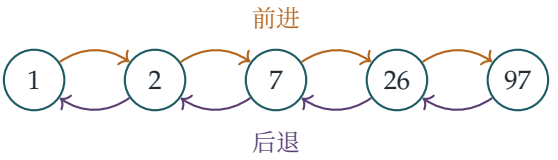
这里 $v_0 = 1$，符合要求，而每一对相邻项 (v_{n-1}, v_n) 不是 $(1, 2)$ 就是 $(2, 1)$。由于 F 是对称的，两者都给出

$$v_n^2 + v_{n-1}^2 - 4v_nv_{n-1} = 1 + 4 - 8 = -3,$$

所以 $(*)$ 对所有 $n \geq 1$ 成立。用 (a) 的说法，这个数列每一步都取 $v_n = v_{n-2}$ 这个选项。

第 (ii)(c) 部分

我们有 $v_0 = 1$ 和 $v_1 = 2$。由 (a)，其后每一项要么等于前两位的那一项（“后退”），要么等于 $4\times$（前一项）$-$（再前一项）（“前进”）。由 $(1,2)$ 出发，前进得出 7，然后是 26、97，如此类推，这就是数列 u_n。后退则把最近一次前进抵消。



所以这个数列就是沿着这条链的一次游走，由 1 出发，每次移到相邻的一个数。由于 1 只有一个邻居，游走到达 1 之后必定立刻走到 2。

要在 $v_0 = 1$ 的情况下得到周期 4，我们需要 $v_4 = 1$。(b) 中周期为 2 的数列只是在 1 和 2 之间来回往返。要做出新的东西，我们多走一步：

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 4\cdot 2 - 1 = 7, \quad v_3 = v_1 = 2, \quad v_4 = v_2 \text{ 或 } 4\cdot 2 - 7 = 1.$$

选取 $v_4 = 1$，然后不断重复，得出

$$v_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod 4, \\ 2 & n \text{ 为奇数}, \\ 7 & n \equiv 2 \pmod 4, \end{cases} \qquad \text{即} \quad 1,2,7,2,1,2,7,2,\ldots$$

直接验证 $(*)$：每一对相邻项都是 $(1,2)$、$(2,7)$、$(7,2)$ 或 $(2,1)$。由对称性，我们只需验证

$$1 + 4 - 8 = -3 \quad \text{和} \quad 4 + 49 - 56 = -3,$$

两式都成立。所以 $(*)$ 对所有 $n \geq 1$ 成立，而这个数列的周期为 4（而不是 2，因为 $v_2 \neq v_0$）。

事实上，周期恰好为 4 的答案只有这一个。在 1, 2 之后，游走必须有 $v_4 = 1$，所以它只能在 v_2 到达 7，然后必须立刻折返。

验算

- 计算 u_n 直至 $n = 40$，确认每一次都有 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$。例如 $(26, 97)$：$676 + 9409 - 10088 = -3$。
- 用数以千计的随机整数三元组检验开首的恒等式。
- 由 1, 2 开始，列出 (a) 所容许的每一个数列，直至 v_8。当中自始至终满足 $v_{k+4} = v_k$ 的只有 $1,2,1,2,\ldots$ 和 $1,2,7,2,\ldots$。

常见错误

- 在 (ii) 中断定 $F_n - F_{n-1} = 0$ 却没有说明原因。原因是 $(*)$ 令每一个 F_n 都等于 -3。
- 忘记 v_1 是唯一确定的。该二次方程有重根 2，所以无需分情况讨论。
- 在 (c) 中只检查了一个周期之内的各对相邻项，而忘记了“首尾相接”的那一对 $(v_3, v_4) = (2, 1)$。

STEP 之外

F_n 这个量是递推关系的一个不变量：一个守恒量，就像力学中的能量。方程 $x^2 + y^2 - 4xy = -3$ 是一个马尔可夫 (Markov) 型 (或佩尔 (Pell) 型) 的丢番图方程 (Diophantine equation)。把二次方程的一个根换成另一个根，即 $x \mapsto 4y - x$，正是经典的“韦达跳跃”(Vieta jumping) 手法，它能由最小的解生成方程的全部整数解。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算术）讲述了佩尔方程，以及如何用递推关系求出它的解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。