详细解答

STEP III 2004，第 5 题

纯数学 · 三角方程

STEP III 2004，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q5

关键思路

两个余弦值相等，当且仅当两个角在相差一个正负号及 2π 的整数倍之下相同。改用正切（tangent）之后，用来区分 θ 与 $\theta+\pi$ 的信息便会丢失，所以这个推论只在一个方向成立，而这正是反例（counterexample）的用意所在。在第 (i) 及 (ii) 部分，我们把 $a\cos x + b\sin x$ 写成 $R\cos(x-\alpha)$ 的形式，利用第一个结果以 $\tan\omega$ 表示 $\tan x$，然后根据各角的大小选出正确的象限（quadrant）。

解答

开首的结果

若 $\cos(x-\alpha)=\cos\beta$，则对某个整数 n 有 $x-\alpha=\pm\beta+2n\pi$，因为余弦是偶函数（even function），且周期（period）为 2π。所以

$$x=\alpha+\beta+2n\pi \quad 或 \quad x=\alpha-\beta+2n\pi.$$

由于 tan 的周期为 π，2π 当然也是它的周期，由此可得 $\tan x=\tan(\alpha+\beta)$ 或 $\tan x=\tan(\alpha-\beta)$（只要这些正切值有定义）。

逆命题（converse）不成立，因为 tan 的周期为 π，而 cos 却不是。取 $\alpha=\beta=0$ 及 $x=\pi$。这时 $\tan x=0=\tan(\alpha+\beta)$，但

$$\cos(x-\alpha)=\cos\pi=-1\neq 1=\cos\beta.$$

一般而言，$x=\alpha+\beta+\pi$ 会给出 $\cos(x-\alpha)=-\cos\beta$。

关于 ω 有两项事实稍后会用得着。由于 $\tan\omega=\frac{4}{3}$，我们有 $\cos\omega=\frac{3}{5}$ 及 $\sin\omega=\frac{4}{5}$。又

由于 $\frac{4}{3} > 1$，我们亦有 $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$。

第 (i) 部分

这里 $\sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}$，所以我们把等式两边除以 $5\sqrt{2}$：

$$\tfrac{1}{5\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{7}{5\sqrt{2}}\sin x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

设 φ 为满足 $\cos\varphi = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ 及 $\sin\varphi = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ 的锐角（acute angle），于是 $\tan\varphi = 7$。方程变成

$$\cos(x+\varphi) = \cos\tfrac{\pi}{4},$$

这正是开首的结果中取 $\alpha = -\varphi$ 及 $\beta = \frac{\pi}{4}$ 的情况。利用 $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$，

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\tfrac{\pi}{4} - \varphi) = \frac{1-7}{1+7} = -\frac{3}{4},$$
$$\tan(\alpha-\beta) = -\tan(\varphi + \tfrac{\pi}{4}) = -\frac{7+1}{1-7} = \frac{4}{3}.$$

> **想一想** 这两个正切值各自对应 $[0, 2\pi]$ 内的两个角，但方程在该范围内只有两个解。是哪两个呢?

正如反例所示，单凭正切值无法判断，所以我们回到 $x = \alpha \pm \beta + 2n\pi$，找出 $\alpha \pm \beta$ 实际上位于何处。由于 $\tan\varphi = 7 > 1$，我们有 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$。

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} - \varphi$ 位于 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 内，其正切值为 $-\frac{3}{4}$。而 $\tan(\frac{\pi}{2} - \omega) = \cot\omega = \frac{3}{4}$，且 $\frac{\pi}{2} - \omega \in (0, \frac{\pi}{4})$。因此 $\alpha + \beta = \omega - \frac{\pi}{2}$，加上 2π 便得 $x = \frac{3\pi}{2} + \omega$。
- $\alpha - \beta = -\varphi - \frac{\pi}{4}$ 位于 $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$ 内，其正切值为 $\frac{4}{3}$。角 $\omega - \pi$ 同样位于这个区间内，正切值亦为 $\frac{4}{3}$。在长度小于 π 且不包含渐近线（asymptote）的区间上，正切函数是一对一（one-to-one）的，所以 $\alpha - \beta = \omega - \pi$。加上 2π 便得 $x = \pi + \omega$。

由于 $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$，这两个值都在 $[0, 2\pi]$ 内，而 n 取其他值时都不会得出此范围内的值。因此

$$x = \pi + \omega \quad \text{或} \quad x = \tfrac{3\pi}{2} + \omega.$$

验证一下：当 $x = \pi + \omega$ 时，$\cos x - 7\sin x = -\frac{3}{5} + \frac{28}{5} = 5$；当 $x = \frac{3\pi}{2} + \omega$ 时，$\cos x = \sin\omega$ 及 $\sin x = -\cos\omega$，由此得 $\frac{4}{5} + \frac{21}{5} = 5$。

第 (ii) 部分

这里 $\sqrt{2^2+11^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$，所以

$$\tfrac{2}{5\sqrt{5}}\cos x + \tfrac{11}{5\sqrt{5}}\sin x = \tfrac{2}{\sqrt{5}}.$$

设 α 为锐角，满足 $\cos\alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ 及 $\sin\alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}$，于是 $\tan\alpha = \frac{11}{2}$。设 β 为锐角，满足 $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$，于是 $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 及 $\tan\beta = \frac{1}{2}$。方程就是 $\cos(x-\alpha) = \cos\beta$，而

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{11}{4}} = \frac{5}{15/4} = \frac{4}{3},$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{11}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{11}{4}} = \frac{6}{-7/4} = -\frac{24}{7}.$$

第二个值就是 $\tan 2\omega$，因为

$$\tan 2\omega = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{8/3}{-7/9} = -\frac{24}{7}.$$

我们再次确定各角的位置。α 和 β 都是锐角，所以

- $\alpha - \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，正切值为 $\frac{4}{3}$，所以 $\alpha - \beta = \omega$；
- $\alpha + \beta \in (0, \pi)$，正切值为负，所以它位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内。由于 $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$，角 2ω 同样位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内，且正切值相同，所以 $\alpha + \beta = 2\omega$。

ω 和 2ω 都在 $[0, 2\pi]$ 内，而加上 $\pm 2\pi$ 便会超出这个范围。因此方程的解为

$$x = \omega \quad 及 \quad x = 2\omega,$$

其中一个解是另一个的两倍，正如题目所求。直接验算：$x = \omega$ 给出 $\frac{6}{5} + \frac{44}{5} = 10$。当 $x = 2\omega$ 时，$\cos 2\omega = \frac{9-16}{25} = -\frac{7}{25}$ 及 $\sin 2\omega = \frac{24}{25}$，由此得 $-\frac{14}{25} + \frac{264}{25} = 10$。

验算

- 每条方程在 $[0, 2\pi]$ 内应该恰好有两个根，因为 $5 < 5\sqrt{2}$ 及 $10 < 5\sqrt{5}$，所以右边的值严格介乎 $-R$ 与 R 之间。
- 以数值计算，$\omega \approx 0.9273$。用变号搜索法可找到 (i) 的根为 4.0689 及 5.6397，即 $\pi + \omega$ 及 $\frac{3\pi}{2} + \omega$。对于 (ii)，则找到 0.9273 及 1.8546，即 ω 及 2ω。

常见错误

- 解 $\tan x = \frac{4}{3}$ 或 $\tan x = -\frac{3}{4}$，然后把 $[0, 2\pi]$ 内的四个角全部列出。其中两个是增根，原因正是反例所揭示的那一点。
- 在 (i) 中把 φ 的正负号弄错，例如把 $\cos x - 7\sin x$ 写成 $\cos(x - \varphi)$ 而不是 $\cos(x + \varphi)$。

STEP 之外

这里的困难在于 tan 不是单射（injective），所以“$\tan x = \tan y$”只能告诉你 x 模 π 的值。在复分析（complex analysis）中，同样的问题出现在辐角（argument）以及 $\log z$ 的分支（branch）的定义之中：在那里，角只能确定到相差 2π 的整数倍。在这个框架下，$a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left((a - \mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$，而 R 和 α 不过是 $a + \mathrm{i}b$ 的模（modulus）和辐角。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这种几何观点阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。