详细解答

# STEP III 2004，第 4 题

纯数学 · 相切圆与级数

**STEP III 2004，第 4 题**

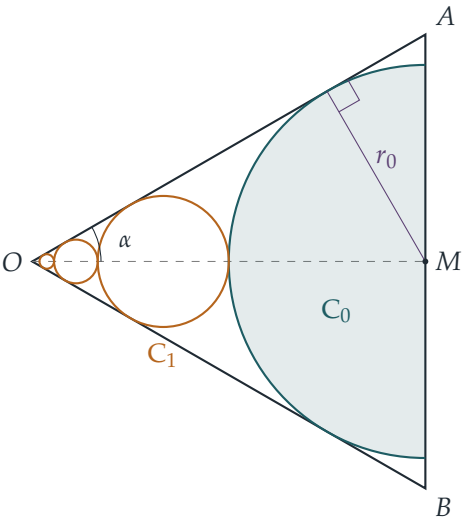
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q4

## 关键思路

凡是同时与 $OA$ 和 $OB$ 相切的圆，圆心都在角 $AOB$ 的角平分线（angle bisector）上，而圆心与 $O$ 的距离由半径决定：在 $O$ 处夹角为 $\alpha$ 的直角三角形给出距离 $= r/\sin\alpha$。把“两圆相切”写成关于这些距离的方程，便把相邻的半径联系起来，从而得知各半径构成等比数列（geometric progression）。于是各面积构成等比级数（geometric series），而最后一部分是单变量的求极大值问题（或者选一个合适的 $\alpha$ 值即可）。

## 解答



### 半径之比

设 $M$ 为 $AB$ 的中点。由于 $OA = OB$，直线 $OM$ 平分角 $AOB$，并且垂直于 $AB$；角 $AOM$ 和角 $BOM$ 各为 $\alpha$。

任取一个半径为 $r$、同时与直线 $OA$ 和 $OB$ 相切的圆。它的圆心与这两条直线等距，所以位于角平分线 $OM$ 上。设圆心为 $P$，圆与 $OA$ 相切于 $T$，则 $PT \perp OA$，$PT = r$，且角 $POT = \alpha$，所以在直角三角形 $OTP$ 中

$$OP = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

这个结果适用于 $\mathrm{C}_0$（圆心为 $M$），也适用于每一个 $\mathrm{C}_n$。记 $d_n = r_n/\sin\alpha$ 为 $O$ 到 $\mathrm{C}_n$ 圆心的距离。

圆 $\mathrm{C}_{n+1}$ 位于 $\mathrm{C}_n$ 与 $O$ 之间的角落里（它必定在角的内部，并在 $\mathrm{C}_n$ 靠近 $O$ 的一侧，因为它与边 $OA$ 和 $OB$ 相切，而不是与它们的延长线相切）。两圆外切（touch externally）时，圆心相距 $r_n + r_{n+1}$，而这里两个圆心都在 $OM$ 上，所以

$$d_n - d_{n+1} = r_n + r_{n+1}.$$

代入 $d_n = r_n/\sin\alpha$，再乘以 $\sin\alpha$：

$$\begin{aligned} r_n - r_{n+1} &= (r_n + r_{n+1})\sin\alpha \\ r_n(1-\sin\alpha) &= r_{n+1}(1+\sin\alpha), \end{aligned}$$

因此

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},$$

这正是所要证明的结果。$n = 0$ 时这个论证同样成立：$\mathrm{C}_1$ 与半圆的弧形部分相切，而这部分正是 $\mathrm{C}_0$ 面向 $O$ 的那一半。

### 总面积

记 $k = \dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$。由于 $0 < \sin\alpha < 1$，我们有 $0 < k < 1$，且 $r_n = k^n r_0$。半圆的面积为 $\frac{1}{2}\pi r_0^2$，而 $\mathrm{C}_n$ 的面积为 $\pi k^{2n} r_0^2$。级数 $\sum_{n\geq 1} k^{2n}$ 是公比为 $k^2 < 1$ 的等比级数，所以它收敛（converge）于 $k^2/(1-k^2)$。于是

$$S = \pi r_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{1-k^2}\right).$$

现在

$$1 - k^2 = \frac{(1+\sin\alpha)^2 - (1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)^2} = \frac{4\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{k^2}{1-k^2} = \frac{(1-\sin\alpha)^2}{4\sin\alpha}.$$

因此

$$S = \pi r_0^2 \frac{2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha}{4\sin\alpha}\pi r_0^2,$$

这就是我们要的结果。

### 与三角形比较

由第一部分，$OM = d_0 = r_0/\sin\alpha$。在直角三角形 $OMA$ 中，$AM = OM\tan\alpha$，所以三角形 $OAB$ 的面积为

$$T = OM\cdot AM = OM^2\tan\alpha = \frac{r_0^2}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r_0^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

（半圆确实放得进底边上：$r_0 = OM\sin\alpha < OM\tan\alpha = AM$。）两式相除，得

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha.$$

**想一想** 我们应该试哪一个 $\alpha$ 值?

当 $\alpha\to 0$ 时，这个比趋向 $\pi/4\approx 0.785$，仅仅略小于 0.8，所以非常瘦长的三角形并不可行。很自然的第一个尝试，是令 $O$ 处为直角，即 $\alpha = \pi/4$。这时 $\sin^2\alpha = \frac12$，$\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$，所以

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

这个值大于 $\frac45$，当且仅当 $15\pi > 32\sqrt{2}$。两边均为正数，所以可以平方：条件变成 $225\pi^2 > 2048$，即 $\pi^2 > 9.102\ldots$。由于 $\pi > 3.1$，我们有 $\pi^2 > 9.61$，所以不等式成立。因此当 $\alpha = \pi/4$ 时（并且根据连续性（continuity），对所有接近 $\pi/4$ 的 $\alpha$ 亦然），这些圆覆盖了三角形超过五分之四的面积。

顺带一提，最佳的 $\alpha$ 可由求 $f(c) = (2-c^2)c$ 的极大值得出，其中 $c = \cos\alpha$：$f'(c) = 2-3c^2 = 0$ 给出 $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$，即 $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$，而这个比的极大值为 $\pi\sqrt{6}/9\approx 0.855$。

## 验算

- 当 $\alpha\to\pi/2$ 时，三角形变得扁平，且 $k\to 0$：各圆 $C_n$ 消失，$S\to\frac12\pi r_0^2$，与 $\frac{1+1}{4}\pi r_0^2$ 吻合。
- 取 $\alpha = \pi/6$，则 $k = \frac13$，$S = \pi r_0^2\left(\frac12 + \frac{1/9}{8/9}\right) = \frac58\pi r_0^2$；公式给出 $\frac{1+1/4}{2}\pi r_0^2 = \frac58\pi r_0^2$。
- 以数值方法验证：对随机选取的 $\alpha$，直接按相切条件构造 3000 个圆，所得结果与两条公式吻合，误差约为 $10^{-15}$；而 $\alpha = \pi/4$ 时的比为 0.8330。

## 常见错误

- 把 $C_0$ 当作整个圆来计算：它是半圆，这正是 $\frac{1}{2}$ 出现的原因。
- 使用 $d_n + d_{n+1} = r_n + r_{n+1}$ 或 $d_n - d_{n+1} = r_n - r_{n+1}$：这些圆是外切的，而且两个圆心都在 $O$ 的同一侧。
- 在最后一部分尝试很小的 $\alpha$：这时比趋向 $\pi/4 < \frac{4}{5}$。

## STEP 之外

这一串圆是由单一个以 $O$ 为中心、比例因子为 $k$ 的位似变换（dilation，即放大 enlargement）生成的：它把角落区域映射到自身，并把每个圆映射到下一个圆。这类自相似（self-similar）的构形通向分形（fractal）和阿波罗尼奥斯圆填充（Apollonian circle packing），其中互相相切的圆的曲率（curvature）满足笛卡儿圆定理（Descartes' circle theorem）。反演（inversion）是一种把圆变成直线的变换，能令许多这类相切问题变得容易；Needham 的 *Visual Complex Analysis* 对此有精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。