详细解答

STEP III 2004，第 3 题

纯数学 · 凸性与级数的界限

STEP III 2004，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q3

关键思路

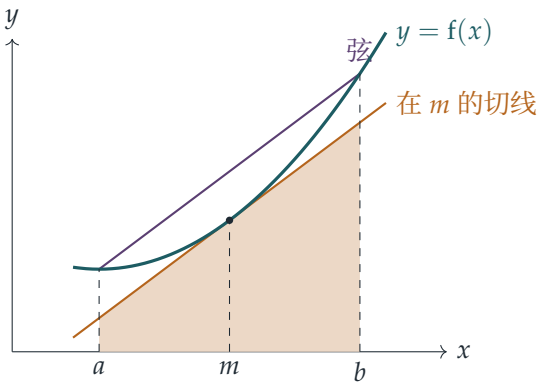
若 $\mathrm{f}'' > 0$，曲线向上弯。因此曲线位于每一条切线（tangent）之上，亦位于每一条弦（chord）之下。在中点的切线，以及连接两端的弦，各自截出一个梯形（trapezium），其面积很容易写出，而这两个面积把积分夹在中间。取 $\mathrm{f}(x) = 1/x^2$ 及区间 $[n-1, n]$，积分便会裂项相消（telescope）。再把各不等式对 n 相加，便得出 $\sum 1/n^2$ 的上下界。

解答

积分的两个界

设 $m = \frac{1}{2}(a+b)$。由于在 $[a,b]$ 上 $\mathrm{f}'' > 0$，斜率 f' 严格递增，所以曲线是凸的（convex）。由此得到两个事实。

- 曲线位于它在 m 的切线之上。设 $t(x) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}'(m)(x-m)$ 及 $g = \mathrm{f} - t$。则 $g(m) = g'(m) = 0$，且 $g'' = \mathrm{f}'' > 0$，所以 g' 递增。因此在 m 的左边 $g' < 0$，在右边 $g' > 0$，故 g 在 m 取得严格极小值 0，而当 $x \neq m$ 时 $\mathrm{f}(x) > t(x)$。
- 曲线位于它的弦之下。设 $c(x)$ 为通过 $(a, \mathrm{f}(a))$ 和 $(b, \mathrm{f}(b))$ 的直线，并设 $h = \mathrm{f} - c$。则 $h(a) = h(b) = 0$ 且 $h'' > 0$。假如 h 在 (a,b) 内取得某个 ≥ 0 的值，它便会在该区间内有一个极大值，而在该处 $h'' \leq 0$，这是不可能的。所以当 $a < x < b$ 时 $\mathrm{f}(x) < c(x)$。



现在比较 $[a,b]$ 上的面积。切线下的面积是一个阔度为 $b-a$ 的梯形。它的平均高度就是 t 在中点的高度 $t(m)=\mathrm{f}(m)$，所以面积是 $(b-a)\,\mathrm{f}(m)$（阴影部分）。弦下的面积是一个梯形，两条平行边的长度为 $\mathrm{f}(a)$ 和 $\mathrm{f}(b)$，所以面积是 $(b-a)\frac{1}{2}\big(\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)\big)$。除了个别孤立点外，曲线严格位于两条直线之间。所以

$$(b-a)\,\mathrm{f}\Big(\frac{a+b}{2}\Big) < \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x < (b-a)\,\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{2}.$$

（草图所示的 f 是正的。但论证其实只用到 $\int(\mathrm{f}-t)>0$ 和 $\int(c-\mathrm{f})>0$，所以 f 的正负并无影响。）

选取 a、b 和 f

中间的一项 $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ 看来像 $\big[-\frac{1}{x}\big]_{n-1}^{n}$，所以取 $\mathrm{f}(x)=1/x^2$、$a=n-1$、$b=n$。于是 $b-a=1$，而且因为 $n-1\geq 1>0$，在 $[n-1,n]$ 上有 $\mathrm{f}''(x)=6/x^4>0$。此外

$$\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\qquad \mathrm{f}\Big(\frac{2n-1}{2}\Big)=\frac{4}{(2n-1)^2},$$

所以由第一部分得

$$\frac{4}{(2n-1)^2} < \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}\Big)\qquad (n\geq 2),$$

这正是所要证明的。

推导关于 1 的两个界

设 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。这个级数收敛（converge），因为当 $n\geq 2$ 时有 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，而这些项会裂项相消。把 $n=2,3,\ldots,N$ 的不等式相加。中间各项裂项相消后得 $1-\frac{1}{N}$，它趋向 1。

想一想 当我们令 $N\to\infty$ 时，严格不等式通常会变成 $\leq$。怎样才能保持严格？

看看当中的差距。对每个 $n \geq 2$，差距 $d_n = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{(2n-1)^2}$ 是正数。所以这些差距的无穷和至少等于它的第一项，即 $d_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} > 0$。这里每个级数都收敛，所以可以逐项求和，而两个和之差严格为正。同样的论证亦适用于右边的不等式。

在左边，$n = 2, 3, 4, \ldots$ 给出 $2n - 1 = 3, 5, 7, \ldots$，所以

$$4\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) < 1.$$

在右边，

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{2}(S-1) + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + (S-1),$$

由此得

$$1 < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

与奇数平方作比较

把左边的级数每两个相邻的项分成一组，每组先是一个奇数项，然后是一个偶数项。对 $k \geq 2$，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1}{(2k-1)^2},$$

因为 $2k > 2k - 1 > 0$。取 $k = 2, 3, 4, \ldots$，左边的各组是 $(3^2, 4^2)$、$(5^2, 6^2), \ldots$，合起来刚好把 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ 每一项各用一次。（可以这样分组，是因为所有项都是正数，而且级数收敛。）右边则是 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$。对 k 求和，并如前所述保持严格不等，便得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

S 的上下界

下界（*lower bound*）。由右边的不等式，$1 < \frac{1}{2} + (S-1)$，所以 $S > \frac{3}{2}$。

上界（*upper bound*）。设 $T = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = S - 1 - \frac{1}{4}$。把刚才的比较与左边的不等式结合，得

$$\frac{1}{2}T < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < \frac{1}{4},$$

所以 $T < \frac{1}{2}$。因此 $S = 1 + \frac{1}{4} + T < \frac{7}{4}$。总括而言，

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}.$$

验算

▶ 真确值是 $S = \pi^2/6 \approx 1.6449$，位于 $(1.5, 1.75)$ 之内。

- 数值上，$4\sum_{k\ge 2}(2k-1)^{-2} = 4(\pi^2/8 - 1) \approx 0.935 < 1$，而 $\frac{1}{2} + (S-1) \approx 1.145 > 1$。
- 至于那个比较，$\frac{1}{2}T \approx 0.197 < 0.234 \approx \sum_{k\ge 2}(2k-1)^{-2}$。
- 试代 $n = 2$：$\frac{4}{9} \approx 0.444 < \frac{1}{2} < \frac{5}{8} = 0.625$。以精确分数对 $2 \le n \le 2000$ 逐一检查，三个不等式全部成立。

常见错误

- 忘记了缺少的 $\frac{1}{4}$：括号由 $\frac{1}{3^2}$ 开始，所以 $T = S - \frac{5}{4}$，而不是 $S - 1$。若用 $S - 1$，便会得出 $S < \frac{3}{2}$ 这个错误结论。
- 把不等号的方向弄反。对于向上弯的曲线，切线（中点）估算偏小，而弦（梯形）估算偏大。
- 过渡到无穷和时，不加说明便保留“$<$”，没有解释为何它取极限后仍然成立。

STEP 之外

这两个界就是中点法则（midpoint rule）和梯形法则（trapezium rule）。凸性告诉你每个法则的误差偏向哪一边，而泰勒定理（Taylor's theorem）则显示两者的误差都以 $(b-a)^3$ 的速度缩小。精确值 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 是欧拉（Euler）对巴塞尔问题（Basel problem）的解答。大学的第一门分析课程会用傅里叶级数（Fourier series）证明它，也会把“严格不等式取极限”这一步严谨化。Abbott 的 *Understanding Analysis* 涵盖了级数的收敛和凸函数这两个课题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。