详细解答

STEP III 2004，第 2 题

纯数学 · 渐近线与曲线描绘

STEP III 2004，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q2

关键思路

把 $f(x)$ 写成直线 $y = x - 4$ 加上一个修正项。修正项的分子是完全平方（perfect square），所以它在某一点处有二重零点，而这个二重零点正正就是相切（tangency）的意思。至于 $f(x) = 0$ 的根，只要消去分母，便会得到一个平方差（difference of two squares），可以立即因式分解。

解答

在整个解答中，记

$$f(x) = (x-4) - \frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)}.$$

第 (i) 部分

分母在 $x = 0$ 和 $x = 4$ 处为零。分子 $16(2x+1)^2$ 在这两处都不为零，所以垂直渐近线（vertical asymptote）是

$$x = 0 \qquad 及 \qquad x = 4.$$

当 $|x|$ 很大时，分式的分子是二次式，分母是三次式：

$$\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{64x^2+64x+16}{x^3-4x^2} \approx \frac{64}{x} \to 0 \quad 当x \to \pm\infty,$$

所以 $f(x) - (x-4) \to 0$，而斜渐近线（oblique asymptote）是

$$y = x - 4.$$

想一想 渐近线怎可能同时又是切线（tangent）?

渐近线只描述曲线在远处的情况，所以没有甚么会阻止这条直线同时在某个有限的点与曲线相切。要找出直线与曲线的交点，设 $\mathrm{f}(x) = x - 4$:

$$\mathrm{f}(x) - (x-4) = -\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2}.$$

由于因式 $(2x+1)$ 带有平方，$x = -\frac{1}{2}$ 是 $\mathrm{f}(x) - (x-4) = 0$ 的二重根（double root）。这表示直线在该处与曲线相切。要直接验证，设 $D(x) = \mathrm{f}(x) - (x-4) = (2x+1)^2\, h(x)$，其中 $h(x) = -16/(x^2(x-4))$。函数 h 在 $x = -\frac{1}{2}$ 附近可导（differentiable），所以

$$D'(x) = 4(2x+1)h(x) + (2x+1)^2 h'(x),$$

它在 $x = -\frac{1}{2}$ 处等于 0。因此 $\mathrm{f}'(-\frac{1}{2}) = 1$，即渐近线的斜率（gradient）。此外 $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}$，这一点位于 $y = x - 4$ 上。所以斜渐近线就是曲线在 $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$ 处的切线。

第 (ii) 部分

把所有项通分，公分母为 $x^2(x-4)$:

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{[x(x-4)]^2 - [4(2x+1)]^2}{x^2(x-4)}.$$

分子是一个平方差:

$$\begin{aligned}[x^2 - 4x - 4(2x+1)][x^2 - 4x + 4(2x+1)] &= (x^2 - 12x - 4)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x^2 - 12x - 4)(x+2)^2.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)}{x^2(x-4)}.$$

因式 $(x+2)^2$ 显示 $x = -2$ 是 $\mathrm{f}(x) = 0$ 的二重根，而且 $x = -2$ 并非分母的零点，正如题目所求。另外两个根来自 $x^2 - 12x - 4 = 0$:

$$x = 6 \pm 2\sqrt{10} \approx 12.32,\ -0.32.$$

第 (iii) 部分

我们先整理绘画草图所需的各项特征。

在 $x = 0$ 附近。当 $x \to 0$ 时，$\mathrm{f}(x) \approx -\dfrac{16}{x^2 \cdot (-4)} = \dfrac{4}{x^2}$，所以从两侧趋近时都有 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$。

在 $x = 4$ 附近。当 $x \to 4$ 时，$\mathrm{f}(x) \approx -\dfrac{16 \cdot 81}{16(x-4)} = -\dfrac{81}{x-4}$。所以当 $x \to 4^-$ 时 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$，而当 $x \to 4^+$ 时 $\mathrm{f}(x) \to -\infty$。

曲线在斜渐近线的哪一侧？$\mathrm{f}(x) - (x-4) = -16(2x+1)^2/(x^2(x-4))$。当 $x < 4$ 时（$x = 0$ 和 $x = -\frac{1}{2}$ 除外）这个量为正，当 $x > 4$ 时为负。所以在 $x = 4$ 的左方，曲线位于 $y = x - 4$ 之上，只在 $x = -\frac{1}{2}$ 处与它相切；在右方，曲线则位于它之下。

f 的正负号。从因式分解后的形式可见，因式 $(x+2)^2$ 和 x^2 永不为负。所以 f 的正负号与 $(x^2 - 12x - 4)/(x-4)$ 的正负号相同：

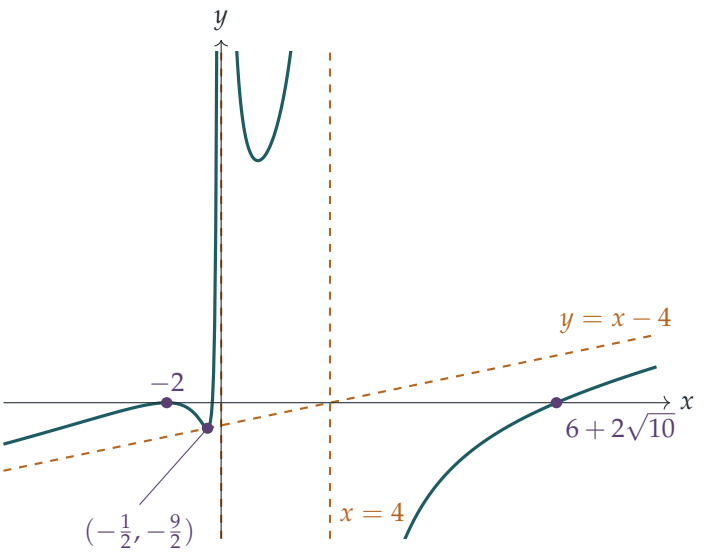
- 当 $x < 6 - 2\sqrt{10}$ 时（$\mathrm{f}(-2) = 0$ 除外），以及当 $4 < x < 6 + 2\sqrt{10}$ 时，$\mathrm{f} < 0$；
- 当 $6 - 2\sqrt{10} < x < 4$ 时（$x \neq 0$），以及当 $x > 6 + 2\sqrt{10}$ 时，$\mathrm{f} > 0$。

曲线在 $x = -2$ 的两侧都保持为负，并在该处与 x 轴相切，所以 $(-2, 0)$ 是局部极大点（local maximum）。

转向点（*turning point*）。STEP 的草图并不需要这些转向点，但有了它们，草图会更准确。求导可得

$$\mathrm{f}'(x) = 1 + \frac{16(2x+1)(2x^2+3x-8)}{x^3(x-4)^2}.$$

在 $(-2,\, 6 - 2\sqrt{10})$ 上，曲线的起点和终点高度都是 0，中间为负，所以在这区间内有一个极小点。以数值计算，这个极小点约在 $(-0.51,\, -4.50)$，刚好在切点的左方。在 $(0, 4)$ 上，曲线在两端都趋向 $+\infty$，所以这里也有一个极小点，约在 $(1.35,\, 42.7)$。在 $\mathrm{f}'(x) = 0$ 中消去分母，得 $(x+2)(x^4 - 10x^3 + 100x^2 - 72x - 64) = 0$。这个四次式恰好只有上述两个实根，所以再没有其他转向点。特别地，f 在整个 $x > 4$ 的范围内都是递增的。



这幅草图是按比例绘画的，因此 $x = -2$ 与 $x \approx -0.32$ 之间的凹陷看起来很浅。那里的最低点只在轴下约 4.5 处，而曲线在 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ 与渐近线相切。

验算

- $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2} - 0 = -\frac{9}{2}$，这一点在 $y = x - 4$ 上。在 $x = -\frac{1}{2}$ 处以数值方法求导数，得 1.000。
- 展开 $(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)$，并与 $x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2$ 比较：两者都是 $x^4 - 8x^3 - 48x^2 - 64x - 16$。
- $f(1000) - (1000 - 4) \approx -0.064 \approx -64/1000$，与 $64/x$ 这个估算所预测的一致。

常见错误

- 忘记了在 $x = 0$ 附近，曲线在两侧都趋向 $+\infty$，原因是有 x^2 这个因式。两条垂直渐近线的表现并不相同。
- 证明相切时，只证明了直线与曲线相交。你还需要证明斜率相同，或者等价地，证明有重根。
- 在第 (ii) 部分把四次的分子展开，然后尝试凭观察找出它的根，而没有看出那是一个平方差。

STEP 之外

一条直线与一条曲线相交而出现“二重根”，恰好就是两者相切的时候。这就是*相交重数*（multiplicity of intersection）的概念，它是代数几何（algebraic geometry）的基础，并引出一些结果，例如关于两条曲线相交多少次的贝祖定理（Bézout's theorem）。有理函数（rational function）在无穷远处可以用它的多项式部分来近似，而余项的大小（这里是 $64/x$）说明了曲线趋近渐近线的速度有多快。这是对渐近展开（asymptotic expansion）的初步体验。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多这种风格的曲线描绘题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。