详细解答

STEP III 2004，第 13 题

概率与统计 • 几何分布

STEP III 2004，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q13

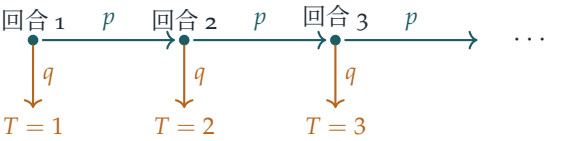
关键思路

暂且放下整场比赛，只跟着一位参赛者看。他出局的回合是一个几何随机变量（geometric random variable），而三位参赛者的出局回合互相独立（independent）。于是每一部分都是关于三个独立几何变量的问题。原来大奖是否颁发，只取决于最迟的出局回合是否有人并列，所以最后一部分就是前两部分合起来的补事件（complement）。

解答

设 $q = 1 - p$，并假设 $0 < p < 1$。对参赛者 j（$j = 1, 2, 3$），设 T_j 为他失败的回合。他在第 k 回合失败，当且仅当他通过了第 $1, \ldots, k-1$ 回合，然后在第 k 回合失败，所以

$$\mathrm{P}(T_j = k) = p^{k-1}q, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$



由于每一回合的通过与否互相独立，而各参赛者的表现亦互相独立，所以 T_1、T_2、T_3 互相独立。另外留意

$$\mathrm{P}(T_j \leq r - 1) = 1 - \mathrm{P}(\text{通过回合} 1, \ldots, r-1) = 1 - p^{r-1}.$$

第 (i) 部分

根据独立性，三人同在第 k 回合出局的概率是 $(p^{k-1}q)^3$。对 k 求这个等比级数（geometric series）之和（公比（common ratio）$p^3 < 1$），得

$$\mathrm{P}(T_1 = T_2 = T_3) = \sum_{k=1}^{\infty} q^3 p^{3(k-1)} = \frac{q^3}{1-p^3} = \frac{(1-p)^2}{1+p+p^2}.$$

第 (ii) 部分

较早出局的参赛者有 3 种选法。选定之后，其余两人同在第 r 回合失败的概率是 $(p^{r-1}q)^2$，而较早出局的那一位在第 r 回合之前某一回合失败的概率是 $1-p^{r-1}$。不同选法所对应的事件互斥（disjoint），所以

$$\mathrm{P}(\text{两人在回合}r\text{，第三人较早}) = 3p^{2r-2}q^2\left(1-p^{r-1}\right).$$

第 (iii) 部分

> **想一想** 用 T_1, T_2, T_3 来表达，大奖究竟在甚么情况下才会颁发?

假设 T_j 之中的最大值只由一位参赛者取得，例如 $T_3 > T_1, T_2$，并设 $m = \max(T_1, T_2)$。在第 m 回合，参赛者 3 仍然在场，并且通过该回合。当时仍在场的其他参赛者都有 $T_j = m$，所以都在该回合失败。因此参赛者 3 在第 m 回合赢得大奖。

反过来，假设最大值有人并列，例如 $T_2 = T_3 = M \geq T_1$。在第 M 回合之前，参赛者 2 和 3 都仍然在场，而且每一回合都通过，所以没有任何一个回合只剩一人过关。到了第 M 回合，余下的人全部失败，所以根本无人过关。因此大奖不会颁发。

由此可见，大奖不颁发，当且仅当最迟的两个出局回合相等：要么三者全部相等（第 (i) 部分），要么其中两者在某个第 r 回合相等，而第三者较早。第二种情况需要 $r \geq 2$，而它正是第 (ii) 部分的事件。把第 (ii) 部分的结果对 $r \geq 2$ 求和，并设 $s = r-1$，

$$\begin{aligned}\sum_{r=2}^{\infty} 3q^2 p^{2r-2}\left(1-p^{r-1}\right) &= 3q^2\sum_{s=1}^{\infty}\left(p^{2s}-p^{3s}\right) = 3q^2\left(\frac{p^2}{1-p^2}-\frac{p^3}{1-p^3}\right)\\ &= 3q^2\,\frac{p^2(1-p^3)-p^3(1-p^2)}{(1-p^2)(1-p^3)} = 3q^2\,\frac{p^2(1-p)}{(1-p^2)(1-p^3)}\\ &= \frac{3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)}.\end{aligned}$$

加上第 (i) 部分的结果，并利用 $1-p^3 = q(1+p+p^2)$，

$$\mathrm{P}(\text{没有大奖}) = \frac{q^3(1+p)+3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{q^2(1+2p^2)}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{(1-p)(1+2p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

由于 $(1+p)(1+p+p^2) = 1+2p+2p^2+p^3$ 及 $(1-p)(1+2p^2) = 1-p+2p^2-2p^3$，两者之差是 $3p+3p^3$。因此

$$\mathrm{P}(\text{颁发大奖}) = \frac{3p(1+p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

验算

- 当 $p \to 0$ 时，人人都在第 1 回合失败，而 (iii) 的答案趋向 0。当 $p \to 1$ 时，并列的机会变得很小，而答案趋向 $\frac{3\cdot 2}{2\cdot 3} = 1$。
- 直接计算：当其中一个 T_j 大于另外两个时，大奖便会颁发，所以其概率是 $3\sum_k p^{k-1}q\,(1-p^{k-1})^2$。取 $p = \frac{1}{2}$ 作精确求和，得 $\frac{5}{7} \approx 0.714$，与 $\frac{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}} = \frac{5}{7}$ 吻合。
- 直接模拟（simulation）比赛本身（取 $p = 0.6$，进行 2×10^5 次），结果有 77.9% 的次数颁发了大奖，而公式给出的是 0.7806。

常见错误

- 在第 (ii) 部分忘记了因数 3，即选择哪一位参赛者较早出局的选法数目。
- 以为最后两人必须在不同回合出局，大奖才会颁发。如果有两人同在第 m 回合出局，而第三人通过了该回合，他仍然获奖。只有在最高处出现并列，大奖才不会颁发。

STEP 之外

这道题目所问的，是独立几何随机变量的最大值，以及这个最大值是否唯一。对 n 位参赛者而言，当 $n \to \infty$ 时，最高处出现并列的概率并不会稳定下来趋向一个极限。它会随 $\log n$ 作极轻微的振荡，这是领袖选举（leader election）等算法分析中一个著名的意外现象。这里用到的工具，即对一个变量取条件（conditioning）以及等比级数求和，在 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction* 中有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。