详细解答

STEP III 2004，第 11 题

力学 · 二体排斥

STEP III 2004，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q11

本题在 *Beyond STEP* 第 10.6 节二体化为一体中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/two-body.html

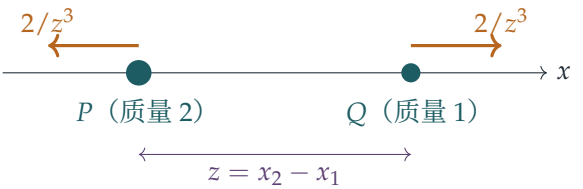
关键思路

两个质点互相推开，会得出两条运动方程（equation of motion），而只要把它们巧妙地组合两次，问题便迎刃而解。*差* $x_2 - x_1$ 给出一条只涉及间距 z 的方程，利用 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ 这个技巧便可积分一次（这其实就是能量守恒）。*加权和* $2x_1 + x_2$ 是质心（centre of mass）位置的三倍，而由于这些力都是内力，它完全不受任何净力作用。

解答

z 的方程

把 P 和 Q 视为直线上的质点（particle），x 沿由 P 指向 Q 的方向递增（因为 $x_2 > x_1$）。斥力（repulsion）把 P 推向负方向，把 Q 推向正方向，两者的大小均为 $2/z^3$。



对每个质点应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad \ddot{x}_2 = \frac{2}{z^3}.$$

所以 $\ddot{x}_1 = -1/z^3$，两式相减，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3},$$

正是所求。

求解 z

先看初始条件（initial conditions）。在 $t = 0$ 时，$z = 1$。P 朝着 Q 运动，即沿正方向运动，所以 $\dot{x}_1 = 1$，而 $\dot{x}_2 = 0$。因此在 $t = 0$ 时，$v = \dot{z} = 0 - 1 = -1$：两者的间距正在缩小。

利用 $\ddot{z} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$，方程变成

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C.$$

当 $z = 1$ 时，$v^2 = 1$，所以 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$，即 $C = 2$。因此

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}, \qquad \text{或} \qquad z^2\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 4z^2 - 3.$$

左边是 $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(z^2)/\mathrm{d}t\right)^2$，这提示我们设 $u = \sqrt{4z^2 - 3} \geq 0$。于是 $u^2 = 4z^2 - 3$，所以 $u\,\dot{u} = 4z\dot{z}$，而上面的方程表示 $(z\dot{z})^2 = u^2$，即 $z\dot{z} = \pm u$。因此

$$\dot{u} = \frac{4z\dot{z}}{u} = \pm 4.$$

起初 $u = 1$ 而 $z\dot{z} = -1 < 0$，所以取负号：$u = 1 - 4t$。

想一想 当 u 降至 0 时会发生甚么事？$\dot{z}$ 的符号会一直保持为负吗？

不会。在 $t = \frac{1}{4}$ 时 $u = 0$，所以 $z = \sqrt{3}/2$ 而 $v = 0$：两个质点在这一刻最为接近。此时 $\ddot{z} = 3/z^3 > 0$，所以 z 开始增加，$\dot{z}$ 变为正数，改为取正号，于是当 $t \geq \frac{1}{4}$ 时 $u = 4t - 1$（在 $t = \frac{1}{4}$ 处连续）。在两种情况下均有 $u^2 = (4t - 1)^2$，所以对所有 $t \geq 0$，

$$4z^2 - 3 = 16t^2 - 8t + 1 \quad \Longrightarrow \quad z^2 = 4t^2 - 2t + 1,$$

又因为 $z > 0$，

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

这就是所求的结果。（注意 $4t^2 - 2t + 1 = 4(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4} > 0$，所以平方根恒有定义。）

求 x_1 和 x_2

由两条运动方程，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(2x_1+x_2)=2\ddot{x}_1+\ddot{x}_2=-\frac{2}{z^3}+\frac{2}{z^3}=0.$$

这就是动量守恒（conservation of momentum）：两个力大小相等、方向相反。所以 $2x_1+x_2$ 是 t 的线性函数。在 $t=0$ 时它等于 $2\cdot0+1=1$，而它的变化率是 $2\dot{x}_1+\dot{x}_2=2\cdot1+0=2$。因此

$$2x_1+x_2=2t+1,\qquad x_2-x_1=\sqrt{4t^2-2t+1}.$$

第一式减去第二式得 $3x_1$，第一式加上第二式的两倍得 $3x_2$：

$$x_1=\frac{2t+1-\sqrt{4t^2-2t+1}}{3},\qquad x_2=\frac{2t+1+2\sqrt{4t^2-2t+1}}{3}.$$

验算

- 在 $t=0$ 时，以上两式给出 $x_1=0$ 和 $x_2=1$。求导后，$\dot{x}_1(0)=\frac{1}{3}\big(2-\frac{1}{2}\cdot(-2)\big)=1$ 及 $\dot{x}_2(0)=\frac{1}{3}(2-2)=0$，符合要求。
- 求 z 的一条捷径：设 $w=z^2$，则 $\ddot{w}=2\dot{z}^2+2z\ddot{z}=2\big(4-3/z^2\big)+6/z^2=8$，所以由 $w(0)=1$ 和 $\dot{w}(0)=2z\dot{z}=-2$ 可得 $w=4t^2-2t+1$。这样便完全不必为符号操心。
- 当 $t\to\infty$ 时，$z\approx2t-\frac{1}{2}$，所以 $x_1\to\frac{1}{2}$ 而 $\dot{x}_2\to2$：P 最终静止，而 Q 带走全部动量（$1\times2=2\times1$）和全部能量。势能（potential energy）是 $1/z^2$，所以开始时的能量是 $1+1=2$，最终的能量是 $\frac{1}{2}\cdot1\cdot2^2=2$。
- 以数值方法逐步计算原来的方程（龙格－库塔法（Runge–Kutta），步长 10^{-4}）直至 $t=5$，所得结果与 x_1、x_2 和 z 的公式相差不超过 10^{-11}，最接近时的间距为 $z=0.8660\ldots=\sqrt{3}/2$。

常见错误

- 取 $\dot{z}(0)=+1$。P 正朝着 Q 运动，所以间距正在缩小。
- 写出 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=-\sqrt{4-3/z^2}$ 并以为它在所有时刻都成立，忽略了 $t=\frac{1}{4}$ 处的转向点（turning point）。
- 在 P 的方程中漏掉质量 2，结果得出 $\ddot{z}=4/z^3$。

STEP 之外

这是二体问题（two-body problem）的缩影：质心作匀速运动，而相对坐标的表现就像一个约化质量（reduced mass）为 $m_1m_2/(m_1+m_2)=\frac{2}{3}$ 的单一质点受着同一个力，因为 $\frac{2}{3}\ddot{z}=2/z^3$。同样的分拆方法可把行星运动化为单一轨道的问题。平方反比以外，立方反比力（inverse-cube force）也很特别：z^2 原来恰好是 t 的二次函数，这是 $1/z^2$ 势所隐藏的一种对称性，属于共形力学（conformal mechanics）的研究课题。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对约化质量和二体运动有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。