详细解答

STEP III 2004，第 10 题

力学 · 弹性绳与简谐运动

STEP III 2004，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

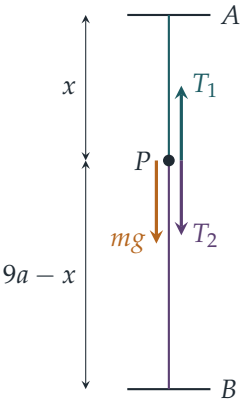
step.maths.org/questions/04-s3-q10

关键思路

每条弦线只有在拉紧时才遵从虎克定律（Hooke's law），所以要按哪些弦线处于拉紧状态，把运动分成几个阶段。在每个阶段中，加速度都是 $7a - x$ 的常数倍，因此质点以 $x = 7a$ 为中心作简谐运动（simple harmonic motion），只是各阶段的 ω 不同。我们先求出第一阶段结束时的时间和速率，再以此作为第二阶段的起始条件。

解答

我们把 P 视为质点（particle），并把弦线视为轻弦：伸长时遵从虎克定律，松弛时不施力。取 $x = AP$，由 A 向下量度，于是 $PB = 9a - x$，并以向下为正方向。



运动方程

当 $x > 6a$ 时，弦线 AP 的伸长量为 $x - 6a$，所以它把 P 向上拉的张力（tension）为

$$T_1 = \frac{6mg(x-6a)}{6a} = \frac{mg(x-6a)}{a}.$$

当 $x < 7a$ 时，弦线 BP 的伸长量为 $(9a - x) - 2a = 7a - x$，所以它把 P 向下拉向 B 的张力为

$$T_2 = \frac{6mg(7a-x)}{2a} = \frac{3mg(7a-x)}{a},$$

而当 $x \geq 7a$ 时，BP 松弛，$T_2 = 0$。

当 $6a < x < 7a$ 时，两条弦线都拉紧，沿向下方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{mg(x-6a)}{a} + \frac{3mg(7a-x)}{a} \\ &= \frac{mg}{a}(a - x + 6a + 21a - 3x) = \frac{mg}{a}(28a - 4x), \end{aligned}$$

所以 $\ddot{x} = \dfrac{4g}{a}(7a - x)$，正是所需结果。

当 $7a < x < 9a$ 时，只有 AP 拉紧，所以

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg(x-6a)}{a} = \frac{mg}{a}(7a - x),$$

由此得 $\ddot{x} = \dfrac{g}{a}(7a - x)$，正是所需结果。

到达 B 所需的时间

第一阶段：$6a \leq x \leq 7a$。设 $y = x - 7a$，则 $\ddot{y} = -\omega_1^2 y$，其中 $\omega_1^2 = 4g/a$，这是以 $x = 7a$ 为中心的简谐运动。质点由 $y = -a$ 从静止开始运动，故

$$x = 7a - a\cos\omega_1 t, \qquad \dot{x} = a\omega_1 \sin\omega_1 t.$$

质点在 $x = 6a$ 从静止开始，向下加速（因为该处 $\ddot{x} > 0$），所以 x 由 $6a$ 起递增，并一直处于这个阶段，直至 $x = 7a$。这在 $\cos\omega_1 t = 0$ 时发生，首次出现于 $\omega_1 t = \pi/2$，即经过时间

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

此时速率为 $a\omega_1 = 2\sqrt{ag}$，方向向下。

> ? **想一想** 方程在 $x = 7a$ 处改变了。我们该怎样继续?

位置和速度在 $x = 7a$ 处都是连续的，所以第一阶段的终结状态就是第二阶段的初始条件（starting conditions）。我们在该处重新计时。

第二阶段：$7a \le x \le 9a$。这时 $\ddot{y} = -\omega_2^2 y$，其中 $\omega_2^2 = g/a$，质点由中心 $y = 0$ 以速率 $2\sqrt{ag}$ 出发。因此，设 τ 为自 $x = 7a$ 起计的时间，则

$$x = 7a + \frac{2\sqrt{ag}}{\omega_2} \sin \omega_2 \tau = 7a + 2a \sin \omega_2 \tau.$$

振幅（amplitude）刚好是 $2a$，所以当 $\sin \omega_2 \tau = 1$ 时，质点到达 $x = 9a$，亦即 B 点，首次出现于 $\omega_2 \tau = \pi/2$。在该刻 $\dot{x} = 2\sqrt{ag} \cos \omega_2 \tau = 0$，所以质点到达 B 时速率为零。这个阶段需时

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

因此，质点到达 B 所需的时间为

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

验算

能量的计算可以确认 P 刚好到达 B 并在该处静止。比较起点（BP 伸长了 a）和到达 B 的一刻（AP 伸长了 $3a$）。弹性势能（elastic energy）由 $\frac{6mg\,a^2}{2\cdot 2a} = \frac{3}{2}mga$ 变为 $\frac{6mg\,(3a)^2}{2\cdot 6a} = \frac{9}{2}mga$。增加了 $3mga$，刚好等于下降 $3a$ 所失去的重力势能（gravitational energy），所以在 B 处的动能（kinetic energy）为零。数值上，取 $a = 0.7$ 和 $g = 9.8$，由 $x = 6a$ 从静止开始，对完整的运动方程逐步作数值计算，得出在 $t \approx 0.2099$ 时 $x = 7a$，在 $t \approx 0.6297$ 时到达最低点 $x = 9a$，而 $\frac{3\pi}{4}\sqrt{a/g} = 0.6297$。

常见错误

- 在 $x > 7a$ 时仍使用 T_2：弦线不能推物，所以一旦 BP 短于 $2a$，它便不施力。
- 整个运动都使用 ω_1，或者忘记以第一段简谐运动所留下的速率 $2\sqrt{ag}$ 重新开始第二段简谐运动。
- 没有检查振幅 $2a$ 是否真的能把 P 带到 B，便把第二阶段说成是四分之一个周期（period）。

STEP 之外

这是一个分段线性振子（piecewise-linear oscillator）：回复力（restoring force）是线性的，但劲度（stiffness）在 $x = 7a$ 处改变。两个部分各有自己的相平面（phase plane）椭圆，而轨迹则由两个不同椭圆的弧组成，在弦线变松之处相接。由弹跳的球到碰撞振子（impact oscillator），这类系统是非线性动力学（nonlinear dynamics）的标准入门例子。

Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）深入讨论了振动和能量方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。