详细解答

STEP III 2004，第 1 题

纯数学 · 双曲函数积分

STEP III 2004，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q1

关键思路

两个被积函数（integrand）都是一个双曲函数（hyperbolic function）乘以由另一个双曲函数构成的式子，而 $\sinh x\,\mathrm{d}x$ 和 $\cosh x\,\mathrm{d}x$ 正好分别是 $\cosh x$ 和 $\sinh x$ 的微分（differential）。因此，代换（substitution）$c=\cosh x$ 和 $s=\sinh x$ 可把它们化为有理函数的积分：一个要用部分分式（partial fractions），另一个则得出反正切（arctangent）。至于题目中“由此”（hence）的一步，关键在于留意到两个分母其实是同一个函数，因为 $2\cosh^2 x-1=1+2\sinh^2 x$。

解答

第一个积分

设 $c=\cosh x$，则 $\mathrm{d}c=\sinh x\,\mathrm{d}x$；积分限 $x=0$ 和 $x=a$ 变为 $c=1$ 和 $c=\cosh a$。于是

$$\int_0^a \frac{\sinh x}{2\cosh^2 x-1}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\cosh a}\frac{\mathrm{d}c}{2c^2-1}.$$

分母可因式分解为 $(\sqrt{2}\,c-1)(\sqrt{2}\,c+1)$，而

$$\frac{1}{(\sqrt{2}\,c-1)(\sqrt{2}\,c+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,c-1}-\frac{1}{\sqrt{2}\,c+1}\right),$$

把右边通分合并即可验证：分子是 $\frac{1}{2}((\sqrt{2}c+1)-(\sqrt{2}c-1))=1$。每一项积分后都得出一个对数，并因链式法则（chain rule）而多出一个因子 $1/\sqrt{2}$。当 $c\geq 1$ 时，$\sqrt{2}c\pm 1$ 两

者皆为正数，所以无须加上绝对值符号：

$$\begin{aligned}\int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2-1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}\,c-1)-\ln(\sqrt{2}\,c+1)\Big]_1^{\cosh a}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a-1}{\sqrt{2}\cosh a+1}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).\end{aligned}$$

由于 $-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，这正是所求的结果。

第二个积分

现在设 $s=\sinh x$，则 $\mathrm{d}s=\cosh x\,\mathrm{d}x$，积分限为 $s=0$ 和 $s=\sinh a$：

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\sinh a}\frac{\mathrm{d}s}{1+(\sqrt{2}\,s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan(\sqrt{2}\,s)\Big]_0^{\sinh a}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a).\end{aligned}$$

无穷积分

想一想 两个被积函数的分母看来并不相同，我们怎样才可以把它们相减？

利用 $\cosh^2 x=1+\sinh^2 x$，

$$2\cosh^2 x-1=2+2\sinh^2 x-1=1+2\sinh^2 x,$$

所以两个分母完全相同，而

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{\cosh x-\sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a-1}{\sqrt{2}\cosh a+1}\right)\\ &\quad-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).\end{aligned}$$

现在令 $a\to\infty$。由于 $\sinh a\to\infty$，故 $\arctan(\sqrt{2}\sinh a)\to\frac{\pi}{2}$。由于 $\cosh a\to\infty$，

$$\frac{\sqrt{2}\cosh a-1}{\sqrt{2}\cosh a+1}=\frac{1-1/(\sqrt{2}\cosh a)}{1+1/(\sqrt{2}\cosh a)}\to 1,$$

而 ln 在 1 处连续（continuous），所以它的对数趋向 0。三项都有有限的极限，因此这个无穷积分收敛（converge），并且

$$\int_0^\infty \frac{\cosh x-\sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right),$$

正如所求。

最后一个积分

想一想 以 e^x 表示的话，$\cosh x - \sinh x$ 和 $1 + 2\sinh^2 x$ 会是甚么样子?

设 $u = e^x$，则 $\cosh x - \sinh x = e^{-x} = 1/u$；再利用二倍角公式（double-angle formula），

$$1 + 2\sinh^2 x = \cosh 2x = \frac{u^2 + u^{-2}}{2} = \frac{u^4 + 1}{2u^2}.$$

此外 $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$，所以 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$，而积分限 $x = 0$、$x \to \infty$ 变为 $u = 1$、$u \to \infty$。因此

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1 + 2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{2u^2}{1 + u^4} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4}.\end{aligned}$$

把上一个结果减半，

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right).$$

这个式子还可以化简：$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2$，所以该对数等于 $2\ln(1+\sqrt{2})$，而

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \approx 0.2437.$$

验算

- 当 $a = 0$ 时，第一条公式给出 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 0$，在空区间上的积分理应如此。
- 最后的答案是正数，并且小于 $\int_1^\infty u^{-4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}$；由于 $1 + u^4 > u^4$，这是合理的。
- 对 $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ 使用辛普森法则（Simpson's rule）（经代换 $u = 1/t$ 后，它变为 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$），得出 0.243748，与公式吻合至小数点后十二位。以 x 表示的无穷积分，数值验算结果为 0.487495，正是它的两倍。

常见错误

- 对 $\frac{1}{\sqrt{2}c \pm 1}$ 或 $\frac{1}{1+2s^2}$ 积分时，漏掉因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。
- 代换时没有更改积分限，或者答案仍以 c 或 s 表示。
- 在最后一部分，忘记 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$，结果得出 $2u/(1+u^4)$ 和一个发散（divergent）的积分。

STEP 之外

最后的结果是一个经典积分的一部分：$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$，而代换 $u \mapsto 1/u$ 显示，在 $[0,1]$ 和 $[1,\infty)$ 上的两部分分别是 $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$，它们的和与差都可以用初等方法求出。在大学一年级的课程中，你还会遇到一条更巧妙的途径，就是围道积分（contour integration）和留数（residue），它可以一举求出 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是学习这个想法的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。