详细解答

STEP II 2004，第 9 题

力学 · 重心

STEP II 2004，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s2-q9

关键思路

半球以曲面着地时，与平面接触的是球面上的一点，而球面的法线必定通过球心。因此反作用力沿着通过底面圆心 O 的铅垂线作用；平衡时，无论放在那里的是甚么物体，其重心（centre of gravity）都必定在同一条铅垂线上。于是题目的每一部分都只是“求出重心，然后倾斜物体，直至重心在 O 的正下方”。采用固定在物体上的坐标，整个计算就轻松得多。

解答

模型与平衡条件

把半球视为刚体（rigid body），它与水平面只在一点 C 接触；把质点（particle）视为固定在边缘上的点质量。作用力只有各个重量和 C 处的接触力。由于 C 在球面上，C 处的法线通过 O；又因为平面是水平的，这条法线是铅垂的。所以 C 在 O 的正下方，而且无论物体怎样滚动，O 的高度始终是 r。

平衡（equilibrium）时，接触力必须与总重量互相抵销，所以它是铅垂的（没有摩擦力），并且与重量沿同一直线作用。因此：

平衡时，系统的重心在通过 O 的铅垂线上。

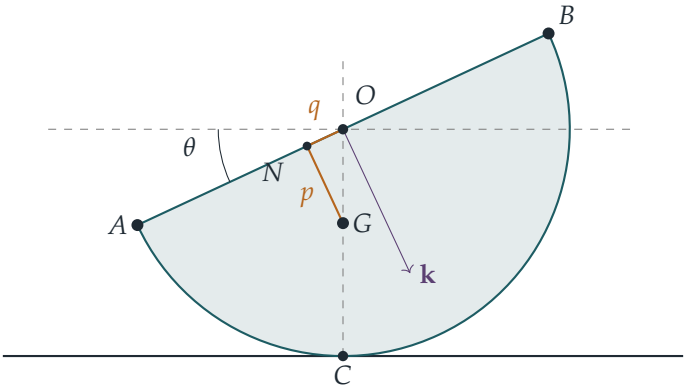
重心在 O 的下方，因为物体位于底面的曲面那一侧。

物体坐标与初始位置

在物体上固定两个互相垂直的单位向量（unit vector）：$\mathbf{k}$ 沿对称轴，由 O 指向曲面；$\mathbf{e}$ 在底面所在的平面内。由于 G 与底面的距离是 p，与 O 的距离是 $\sqrt{p^2+q^2}$，它在底面上的垂足 N 与 O 的距离是 q。选取 $\mathbf{e}$ 由 O 指向 N，便得

$$\overrightarrow{OG} = p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}.$$

底面垂直于 $\mathbf{k}$，所以底面与水平面的夹角等于 $\mathbf{k}$ 与铅垂线的夹角。在初始位置，$\overrightarrow{OG}$ 铅垂向下，所以这个角 θ 满足 $\tan\theta = q/p$。



边缘上哪一点最低？边缘上的一点相对于 O 的位置是 $r(\cos\phi\,\mathbf{e} + \sin\phi\,\mathbf{f})$，其中 $\mathbf{f}$ 是第三个单位向量，与前两者都垂直。这一点在 O 以下的深度，就是它沿向下的单位向量 $(p\mathbf{k}+q\mathbf{e})/\sqrt{p^2+q^2}$ 的分量，即

$$\frac{rq\cos\phi}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

当 $\phi = 0$ 时最大（这里取 $q > 0$；若 $q = 0$，底面是水平的，没有唯一的最低点）。所以

$$\overrightarrow{OA} = r\,\mathbf{e}, \qquad \overrightarrow{OB} = -r\,\mathbf{e}.$$

用文字说明：A 与 G 在对称轴的同一侧，并且在通过 O 和 G 的铅垂平面内，而整个问题始终留在这个平面内。

质点在 A

半球连同质点的重心 G_A 由下式给出：

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_A} = M(p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}) + mr\,\mathbf{e} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq+mr)\,\mathbf{e}.$$

在新的平衡位置，$\overrightarrow{OG_A}$ 是铅垂的，所以与求 θ 时完全一样，$\mathbf{k}$ 与铅垂线的夹角（亦即底面与水平面的夹角）就是 $\overrightarrow{OG_A}$ 与 $\mathbf{k}$ 的夹角：

$$\tan\alpha = \frac{Mq+mr}{Mp}, \qquad \text{所以} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Mq+mr}{Mp}\right).$$

正如所料，A 处多出的重量把 A 拉得更低，于是 $\alpha > \theta$。

> **想一想** 为甚么底面的倾角就是 $\overrightarrow{OG_A}$ 与对称轴的夹角？

底面垂直于对称轴 $\mathbf{k}$，而水平面垂直于铅垂线。把一对直线各自旋转一个直角，并不改变两者之间的夹角，所以底面与水平面的夹角等于 $\mathbf{k}$ 与铅垂线的夹角。平衡时，通过 O 的铅垂线就是直线 OG_A，它沿 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{e}$ 的分量分别是 Mp 和 $Mq + mr$（除以 $M + m$ 之后）。它与 $\mathbf{k}$ 所成角的正切就是这两个分量之比。

质点在 B

现在质点位于 $-r\,\mathbf{e}$，所以新的重心 G_B 满足

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_B} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq - mr)\,\mathbf{e}, \qquad \text{由此得} \qquad \tan\beta = \frac{Mq - mr}{Mp}.$$

由于 m 很小，我们有 $mr < Mq$，所以 $\overrightarrow{OG_B}$ 仍然与先前一样在对称轴的同一侧，底面向同一方向倾斜，倾角是较小的 β。

两个位置之间的夹角

由复角公式（compound-angle formula），

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{2mr}{Mp}}{1 + \dfrac{(Mq+mr)(Mq-mr)}{M^2p^2}} \\ &= \frac{2mMrp}{M^2p^2 + M^2q^2 - m^2r^2} = \frac{2mMrp}{M^2\,(p^2+q^2) - m^2r^2},\end{aligned}$$

其中第三步把分子和分母同乘以 M^2p^2。这就是所要求的结果。

验算

- 若 $q = 0$（例如均匀半球），两个位置互为镜像：$\tan\alpha = mr/(Mp)$ 而 $\beta = -\alpha$。公式给出 $\tan 2\alpha = 2t/(1-t^2)$，其中 $t = mr/(Mp)$，正是二倍角公式，与预期相符。
- 若 $m \to 0$，则 α 和 β 都趋向 θ，而右边趋向 0。
- 取 $M = 1$、$m = 0.1$、$r = 1$、$p = \frac{3}{8}$、$q = \frac{1}{8}$，得 $\tan\alpha = 0.6$ 和 $\tan\beta = \frac{1}{15}$，所以 $\alpha \approx 30.96°$，$\beta \approx 3.81°$。结果的两边都等于 $\frac{20}{39} \approx 0.5128$。我们亦以数值方法求出平衡角：对 2000 组随机数值，把重心的高度减至最小，所得结果与 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 的公式相符，误差在 10^{-13} 以内。

常见错误

- 把 G 放在*原来位置的接触点*的正下方，而不是 O 的正下方。接触点会随物体滚动而移动；O 才是始终在接触点正上方的那一点。
- 把 A 取在对称轴的错误一侧。边缘的最低点与 G 在同一侧，这正是质点在 A 时倾角*增大*的原因。
- 当 $mr > Mq$ 时仍把 β 当作正数。这时底面向另一方向倾斜，公式只在把 β 算作负数时才成立；“m 很小”这个条件正是要排除这种情况。

STEP 之外

这里所用的原理是：刚体在重力和单一接触力作用下平衡时，其质心（centre of mass）在该力的作用线上。等价的说法是，质心处于高度的驻值（stationary）位置；而考察物体滚动时这个高度的变化，还可以判定平衡是否稳定。这就是判定稳定性的能量法（energy method）的起点，大学一年级力学会把这套方法发展下去，用来处理摇摆和滚动的物体。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种观点讲述质心和刚体平衡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。