详细解答

STEP II 2004，第 8 题

纯数学 · 微分方程的比较

STEP II 2004，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s2-q8

关键思路

当 $0 \le x < 1$ 时，右边为正数，所以 x 随 t 递增，我们可以把方程倒转过来看：t 变成 x 的函数，即由 0 爬升到高度 x 所需的时间。在每个高度上斜率都较大，即每个高度都较早到达，所以题目给出的右边各式之间的不等式（inequality）立即定出三条曲线的次序，一条在另一条之上。至于爬升到 $x = 1$ 所需的时间是有限还是无限，就变成一个瑕积分（improper integral）是否收敛（converge）的问题。

解答

以下一律以 $x_n(t)$ 表示指数为 n 时的解。在 $t = 0$ 时，$x = 0$，而对每个 n 斜率都是 $(1-0)^{1/n} = 1$，所以所有曲线都沿直线 $x = t$ 离开原点。当 $0 \le x < 1$ 时，斜率严格为正，所以 x 递增，而

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1-x^n)^{1/n}}, \qquad \text{所以} \qquad t_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^n)^{1/n}}$$

就是解到达高度 x 的时刻，其中 $0 \le x < 1$。

第 (i) 部分

取 $n = 1$，方程为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x$。分离变量（separating variables）（这是可行的，因为沿着解有 $1 - x > 0$），

$$t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = -\ln(1-x), \qquad \text{所以} \qquad x = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

图像由原点出发，斜率为 1，一直递增并且向下凹（concave）（其斜率 e^{-t} 递减），当 $t \to \infty$ 时趋近渐近线（asymptote）$x = 1$ 但永远不会到达：当 $x \to 1$ 时，$t_1(x) = -\ln(1-x) \to \infty$。

下图中最低的一条曲线就是它。

第 (ii) 部分

不等式。对 $0 < x < 1$，$1 - x$ 和 $(1 - x^2)^{1/2}$ 都是正数，所以该不等式等价于两边平方后所得的不等式：

$$(1 - x)^2 < 1 - x^2 \iff 1 - 2x + x^2 < 1 - x^2 \iff 2x^2 < 2x \iff x < 1,$$

其中最后一步是除以 $2x > 0$。由于 $x < 1$ 成立，所以 $1 - x < (1 - x^2)^{1/2}$ 也成立。

草图。在 $(0, 1)$ 内的每个高度 x，$n = 2$ 的曲线都比 $n = 1$ 的曲线陡。因此，对 $0 < x < 1$，

$$t_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1 - \xi} = t_1(x),$$

因为左边的被积函数（integrand）在 $(0, x]$ 上严格较小。所以 $n = 2$ 的解严格较早到达每一个高度；又因为两个解都是递增的，所以在每个时刻 $t > 0$（只要 $x_2 < 1$），$n = 2$ 的曲线都严格位于 $n = 1$ 的曲线之上。两者都以斜率 1 离开原点，所以在原点附近它们非常接近，然后随着 t 增大而分开。

> **想一想** 两条曲线在原点的斜率相同。为甚么 $n = 1$ 的曲线不能在稍后悄悄升到上面?

要升到上面，它必须在某个高度 x 追上 $n = 2$ 的曲线，即在同一时刻到达 x。但对每个 $x \in (0, 1)$ 都有 $t_2(x) < t_1(x)$：爬得较慢的那个总是严格地迟到。（等价的说法是：凡两条曲线处于同一高度之处，$n = 2$ 的那条都较陡，所以它永远不会被超越。）

求解。设 $x = \sin y$，其中 $0 \le y < \frac{1}{2}\pi$，且在 $t = 0$ 时 $y = 0$。于是 $\cos y > 0$，所以 $(1 - x^2)^{1/2} = (\cos^2 y)^{1/2} = \cos y$，方程变成

$$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = t,$$

这里用到在 $t = 0$ 时 $y = 0$。所以解为

$$x = \sin t \qquad \text{其中} 0 \le t < \tfrac{1}{2}\pi.$$

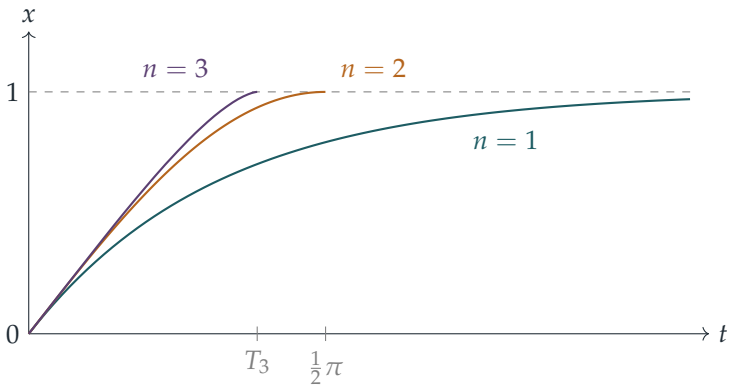
这与 $t_2(x) = \arcsin x$ 吻合。与 $n = 1$ 的情况不同，这个解在有限时间内到达 $x = 1$，时刻为 $t = \frac{1}{2}\pi$，而且到达时斜率为 $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$，与直线 $x = 1$ 相切。

第 (iii) 部分

与之前完全一样，在 $(0, 1)$ 上运用题目给出的不等式 $(1 - x^2)^{1/2} < (1 - x^3)^{1/3}$，可知 $n = 3$ 的曲线在每个高度都比 $n = 2$ 的曲线陡，所以

$$t_3(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1 - \xi^3)^{1/3}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}} = \arcsin x \qquad (0 < x < 1).$$

所以 $n=3$ 的曲线和其他曲线一样以斜率 1 离开原点，并且在 $t>0$ 时严格位于 $x=\sin t$ 之上。它的斜率 $(1-x^3)^{1/3}$ 在 $x\to 1$ 时降至 0，所以它与直线 $x=1$ 相遇时同样会变得平坦。



在 $t=\frac{1}{2}\pi$ 之前到达 $x=1$。草图显示 $n=3$ 的曲线位于 $\sin t$ 之上，而后者本身在 $\frac{1}{2}\pi$ 到达 1；所以 $n=3$ 的曲线必定不迟于该时刻到达 1。要看出它是严格较早到达，可在积分的比较中令 $x\to 1$。到达 $x=1$ 所需的时间为

$$T_3=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}}.$$

这个瑕积分收敛：由于在 $[0,1]$ 上 $1-\xi^3=(1-\xi)(1+\xi+\xi^2)\geq 1-\xi$，被积函数至多为 $(1-\xi)^{-1/3}$，而后者在 $[0,1]$ 上的积分为 $\frac{3}{2}$。又由于被积函数在 $(0,1)$ 上严格小于 $(1-\xi^2)^{-1/2}$，

$$T_3<\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}}=\Big[\arcsin\xi\Big]_0^1=\tfrac{1}{2}\pi.$$

所以 $n=3$ 的解在时刻 $T_3<\frac{1}{2}\pi$ 到达 $x=1$，这正是所要证明的。（一旦到达，它就停留在 $x=1$，因为斜率为 0，而且不可能变成负数。）

验算

- 代回原式：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-\mathrm{e}^{-t})=\mathrm{e}^{-t}=1-x$，而对 $0\leq t\leq\frac{1}{2}\pi$ 有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t=\cos t=(1-\sin^2 t)^{1/2}$。以数值方法（龙格—库塔法，Runge–Kutta）解各方程，所得结果与这些公式吻合。
- 数值上，$T_3\approx 1.2092$，明显小于 $\frac{1}{2}\pi\approx 1.5708$。事实上 $T_3=\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ 是准确值（见下文），两者吻合至小数点后七位。
- 在高度 $x=0.9$，三个时间分别为 $-\ln 0.1\approx 2.30$、$\arcsin 0.9\approx 1.12$ 和 $t_3(0.9)\approx 0.98$，次序与预测相符。

常见错误

- 只说“斜率较大，所以曲线较高”，却没有指出所比较的是同一高度上的斜率，而不是同一时刻的斜率。改为把 t 看成 x 的函数，论证才站得住脚。
- 写出 $(1-\sin^2 y)^{1/2}=\cos y$ 而没有说明为何 $\cos y \geq 0$：这需要 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$。
- 把 $x=\sin t$ 延续到 $t=\frac{1}{2}\pi$ 之后：在那里它会递减，但方程规定 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \geq 0$。

STEP 之外

解在有限时间内到达 $x=1$，然后永远停留在 $x=1$，原因是 $(1-x^n)^{1/n}$ 在 $x=1$ 处不满足利普希茨（Lipschitz）条件；微分方程（differential equation）的唯一性定理（uniqueness theorem）正是在这里失效（当 $n=2$ 时，$x=1$ 和 $x=\sin t$ 都通过 $(\frac{1}{2}\pi,1)$）。到达时间是一个 Beta 函数（Beta function）：代入 $u=\xi^n$ 可得 $T_n=\frac{1}{n}B(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})=\dfrac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$，当 $n=2$ 时为 $\frac{1}{2}\pi$，当 $n=3$ 时为 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$，并且当 $n\to\infty$ 时递减趋向 1。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（基础微分方程教科书）讨论了解的存在性与唯一性，以及解的比较。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。