详细解答

STEP II 2004，第 7 题

纯数学 · 二分法

STEP II 2004，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s2-q7

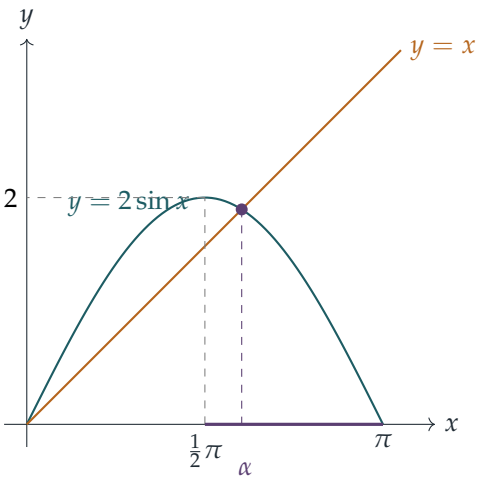
关键思路

方程 $2\sin x - x = 0$ 的根（root），就是曲线 $y = 2\sin x$ 与直线 $y = x$ 相交之处，所以图像部分只涉及一条正弦曲线和一条直线。至于二分法（bisection）的每一步，归根究底都只问同一个问题：在中点（midpoint）处，$2\sin c$ 比 c 大还是小？半角公式（half-angle formula）可把 $\frac{5}{8}\pi$ 和 $\frac{9}{16}\pi$ 的正弦值化为多重根式，而比较两个正数的平方，则令计算只需用到题目给出的近似值。

解答

I_0 内恰有一个根

我们有 $f(x) = 0 \iff 2\sin x = x$，所以各根就是 $y = 2\sin x$ 与 $y = x$ 的交点的 x 坐标。



在 $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ 上：

- 在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 处，曲线的高度为 2，直线的高度为 $\frac{1}{2}\pi < 2$（因为 $\pi < 4$），所以曲线在直线之上；
- 在 $x = \pi$ 处，曲线的高度为 0，直线的高度为 $\pi > 0$，所以曲线在直线之下；
- 在这个区间（interval）上，曲线 $y = 2\sin x$ 递减，而直线 $y = x$ 递增。

两个图像都是连续（continuous）的，所以曲线必定在区间内某处穿过直线；又因为一个下降、一个上升，曲线一旦落到直线之下，就不可能再回到直线之上。因此两者恰好相交一次，即 $\mathrm{f}(x) = 0$ 在 I_0 内恰有一个根 α。用 f 来表达：$\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) = 2 - \frac{1}{2}\pi > 0$，$\mathrm{f}(\pi) = -\pi < 0$，而且 f 在该区间上严格递减（strictly decreasing）。

在以下每一步二分法中，我们都保留 f 变号的那一半。由于 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$，一切都取决于 $\mathrm{f}(c_n)$ 的正负：若 $\mathrm{f}(c_n) < 0$，根在 c_n 的左边；若 $\mathrm{f}(c_n) > 0$，根就在右边。

求 I_1

这里 $c_0 = \frac{3}{4}\pi$，而

$$\mathrm{f}(\tfrac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{4}\pi \approx 1.4 - \tfrac{3}{4}\sqrt{10}.$$

由于 $\sqrt{10} > 3$，我们有 $\frac{3}{4}\sqrt{10} > 2.25 > 1.4$，所以 $\mathrm{f}(c_0) < 0$。连同 $\mathrm{f}(a_0) > 0$，可得 $\mathrm{f}(a_0)\mathrm{f}(c_0) < 0$，所以

$$I_1 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{4}\pi].$$

求 I_2

现在 $c_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi) = \frac{5}{8}\pi$，我们需要知道 $2\sin\frac{5}{8}\pi - \frac{5}{8}\pi$ 的正负。

想一想 不用计算机，怎样求 $\sin\frac{5}{8}\pi$?

利用 $\sin\frac{5}{8}\pi = \sin(\pi - \frac{5}{8}\pi) = \sin\frac{3}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi$，再以 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 代入倍角公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$：

$$4\cos^2\tfrac{1}{8}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{4}\pi\big) = 2 + \sqrt{2}.$$

所以 $(2\sin\frac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2}$。$2\sin\frac{5}{8}\pi$ 和 $\frac{5}{8}\pi$ 都是正数，所以可以比较它们的平方：

$$(2\sin\tfrac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4, \qquad (\tfrac{5}{8}\pi)^2 \approx \tfrac{25}{64}\cdot 10 = \tfrac{250}{64} \approx 3.9.$$

因此 $2\sin\frac{5}{8}\pi < \frac{5}{8}\pi$，即 $\mathrm{f}(c_1) < 0$。同样地，$\mathrm{f}(a_1) = \mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$，所以 $\mathrm{f}(a_1)\mathrm{f}(c_1) < 0$，于是

$$I_2 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{5}{8}\pi],$$

正如题目所求。

求 I_3

现在 $c_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{5}{8}\pi) = \frac{9}{16}\pi$。与之前一样，$\sin\frac{9}{16}\pi = \sin\frac{7}{16}\pi = \cos\frac{1}{16}\pi$，再以 $\theta = \frac{1}{16}\pi$ 代入倍角公式，得

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 = 4\cos^2\tfrac{1}{16}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{8}\pi\big) = 2 + 2\cos\tfrac{1}{8}\pi = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

当中用到上一步得出的 $2\cos\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$。取 $\sqrt{2} \approx 1.4$，我们有 $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} > 1.8$（因为 $1.8^2 = 3.24$），所以

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 > 3.8, \qquad (\tfrac{9}{16}\pi)^2 \approx \tfrac{81}{256}\cdot 10 = \tfrac{810}{256} < 3.2.$$

所以 $2\sin\frac{9}{16}\pi > \frac{9}{16}\pi$，即 $\mathrm{f}(c_2) > 0$。这一次 $\mathrm{f}(a_2)\mathrm{f}(c_2) > 0$，而 $\mathrm{f}(c_2)\mathrm{f}(b_2) = \mathrm{f}(\frac{9}{16}\pi)\,\mathrm{f}(\frac{5}{8}\pi) < 0$。因此

$$I_3 = [\tfrac{9}{16}\pi, \tfrac{5}{8}\pi].$$

这里使用近似值是稳妥的：在每个中点处，所比较的两个量相差约 0.5 或以上，远大于 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$ 或 $\pi \approx \sqrt{10}$ 所带来的误差。

验算

- 以数值方法执行二分法，得到的区间相同，而根为 $\alpha \approx 1.8955$，位于 $\frac{9}{16}\pi \approx 1.767$ 与 $\frac{5}{8}\pi \approx 1.963$ 之间。
- 精确值与近似值吻合：$\mathrm{f}(\frac{3}{4}\pi) \approx -0.942$，$\mathrm{f}(\frac{5}{8}\pi) \approx -0.116$，以及 $\mathrm{f}(\frac{9}{16}\pi) \approx 0.194$。
- 每个区间的长度都是前一个的一半：$\frac{1}{2}\pi$、$\frac{1}{4}\pi$、$\frac{1}{8}\pi$、$\frac{1}{16}\pi$。

常见错误

- 只指出函数变号，却没有解释为何只有一个根。单凭变号只能保证至少有一个根；要证明唯一性（uniqueness），还需要“一个递减、一个递增”的论证。
- 以平方来比较 $2\sin c$ 和 c，却没有先指出两者都是正数。

STEP 之外

变号论证其实就是介值定理（intermediate value theorem），它是大学分析课程中最早遇到的重要定理之一；其证明需要用到实数的完备性（completeness），而二分法本质上就是把这个证明当作算法来执行。二分法必定收敛，但速度缓慢（每一步只多得一个二进制位）。牛顿－拉弗森法（Newton–Raphson）等方法收敛得快得多，但有可能失败，所以数值分析（numerical analysis）在很大程度上就是在稳妥与速度之间作取舍。有关理论可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。