详细解答

STEP II 2004，第 6 题

纯数学 · 向量分解

STEP II 2004，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s2-q6

关键思路

把一个向量（vector）分拆成沿 $\mathbf{a}$ 方向的部分和垂直（perpendicular）于 $\mathbf{a}$ 的部分，其实就是投影（projection）：由于 $\mathbf{a}$ 是单位向量（unit vector），任何向量 $\mathbf{v}$ 沿它的分量（component）就是 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}$。第二部分是同一个想法，只是高了一个维度。向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{q}$ 是 Π 内两个互相垂直的方向，而 $\mathbf{R}$ 则提供第三个与两者垂直的方向。因此，我们既可以逐一向每个方向投影，也可以先设未知倍数，再用点积（dot product）写出垂直的条件。我们采用第二种做法，并以第一种做法作验算。

解答

向量 p 与 q

由于 $\mathbf{p}$ 平行（parallel）于 $\mathbf{a}$，设 $\mathbf{p}=\lambda\mathbf{a}$。于是

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

它自然位于 Π 内，因为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 都在其中。要使 $\mathbf{q}$ 垂直于 $\mathbf{a}$，我们需要

$$0=\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=(1-\lambda)\,|\mathbf{a}|^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(1-\lambda)+3,$$

这里用了 $|\mathbf{a}|=1$ 和 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3$。所以 $\lambda=4$，并且

$$\boxed{\mathbf{p}=4\mathbf{a},\qquad \mathbf{q}=\mathbf{b}-3\mathbf{a}.}$$

确实有 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=3-3=0$，以及 $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$。（换一个说法，$\mathbf{p}$ 就是投影 $((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}=4\mathbf{a}$。）

向量 P、Q 与 R

首先列出几项稍后要用的事实。由 $|\mathbf{b}| = 5$,

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - 6\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 9|\mathbf{a}|^2 = 25 - 18 + 9 = 16,$$

所以 $|\mathbf{q}| = 4$。特别地，$\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$，故 $\mathbf{b}$ 不平行于 $\mathbf{a}$，而 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 张成（span）平面 Π。

设 $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{Q} = \beta\mathbf{q} = \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$。这样 $\mathbf{R}$ 就必定是

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \alpha\mathbf{a} - \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}) = \mathbf{c} + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}, \qquad \text{其中} u = 1 - \alpha + 3\beta,\ v = 1 - \beta.$$

想一想 怎样把“$\mathbf{R}$ 垂直于 Π”化成方程?

一个向量垂直于一个平面，当且仅当它垂直于该平面内两个不平行的向量。我们刚刚看到 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 正是这样的一对向量。所以条件就是 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$ 和 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 0$。利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -2$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 2$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$、$|\mathbf{a}|^2 = 1$ 和 $|\mathbf{b}|^2 = 25$:

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + u + 3v = 0,$$
$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + 3u + 25v = 0.$$

由第一式得 $u = 2 - 3v$。代入第二式得 $8 + 16v = 0$，所以

$$v = -\tfrac{1}{2}, \qquad u = \tfrac{7}{2}.$$

于是 $\beta = 1 - v = \tfrac{3}{2}$，而 $\alpha = 1 + 3\beta - u = 1 + \tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2} = 2$。因此

$$\boxed{\mathbf{P} = 2\mathbf{a}, \qquad \mathbf{Q} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}), \qquad \mathbf{R} = \mathbf{c} + \tfrac{7}{2}\mathbf{a} - \tfrac{1}{2}\mathbf{b}.}$$

把三者相加，$\mathbf{a}$ 的系数（coefficient）是 $2 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2} = 1$，$\mathbf{b}$ 的系数是 $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} = 1$，$\mathbf{c}$ 的系数是 1，所以 $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$，符合要求。

最后，$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$：假如它是零向量，$\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} - \tfrac{7}{2}\mathbf{a}$ 便会位于 Π 内，与 $\mathbf{c}$ 不平行于 Π 这个假设矛盾。正是这个假设，令 $\mathbf{R}$ 成为一个真正的法向量（normal vector）。

另一个角度：向互相垂直的轴投影

单位向量 $\mathbf{a}$、$\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$ 和 $\mathbf{n}$（Π 的一个单位法向量）组成一个正交归一组（orthonormal set）。所以 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 就是 $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 在前两个向量上的投影:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 1 + 3 - 2 = 2, \qquad \text{所以} \mathbf{P} = 2\mathbf{a};$$
$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{q}) = \tfrac{1}{4}(0 + 16 + 8) = 6, \qquad \text{所以} \mathbf{Q} = 6\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}),$$

这里用了 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{q} = 25 - 9 = 16$ 和 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{q} = 2 + 6 = 8$。余下的部分 $\mathbf{R}$，就是 $\mathbf{c}$ 沿 Π 法线方向的分量。这与上面的答案一致。

验算

- 直接验算：$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 0$，而 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + \frac{21}{2} - \frac{25}{2} = 0$。
- 一个具体例子：取 $\mathbf{a} = \mathbf{i}$、$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$，它们满足所有已知条件。这时 $\mathbf{q} = 4\mathbf{j}$、$\mathbf{P} = 2\mathbf{i}$、$\mathbf{Q} = 6\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{R} = \mathbf{k}$，而它们的和是 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$。
- 我们亦用 2000 组满足条件、方向随机的向量组合测试过这些公式。每一次都有 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} = 0$、$|\mathbf{q}| = 4$，$\mathbf{R}$ 是 Π 的法向量，而且三个向量之和等于 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$，误差全部在 10^{-9} 以内。

常见错误

- 取 $\mathbf{p} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} = 3\mathbf{a}$，这只是 $\mathbf{b}$ 本身的投影。我们需要的是 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的投影，即 $4\mathbf{a}$。
- 只加上 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$ 这一个条件。要垂直于一个平面，需要两个独立的条件。
- 假设 $\mathbf{P} = \mathbf{p}$ 及 $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$。加入 $\mathbf{c}$ 之后，平面内的分量也会改变，因为 $\mathbf{c}$ 本身在 Π 内也有分量。

STEP 之外

这是格拉姆－施密特正交化过程（Gram–Schmidt process）的缩影。我们由 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 出发，构造出两两垂直的方向 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c} + \frac{7}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$，然后把一个向量沿这些方向分解。同样的步骤在任何维数都适用。它是正交投影（orthogonal projection）、最小二乘拟合（least-squares fitting）和矩阵的 QR 分解（QR factorisation）的基础。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）对这些课题都有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。