详细解答

STEP II 2004，第 5 题

纯数学 · 积分方程

STEP II 2004，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s2-q5

关键思路

未知函数藏在积分（integral）之内，看起来很吓人，但只要用复角公式（compound-angle formula）把 $\sin(x+t)$ 展开，t 就可以移到积分之外，而留在积分内的只是两个固定的数。因此 f 必定是 t 加上 $\sin t$ 与 $\cos t$ 的一个组合，整个问题于是归结为由两条线性方程求出两个常数。第一部分的两个积分，正是那条方程所需要的。

解答

两个积分

运用分部积分法（integration by parts），取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$：

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x = (-\pi\cos\pi - 0) + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \pi.$$

同样地，取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$：

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -(1+1) = -2.$$

我们还需要在 $[0,\pi]$ 上的三个标准积分：

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi}\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

头两个可由 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 及 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ 得出，因为 $\cos 2x$ 在一整个周期上的积分为零；第三个是 $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,\mathrm{d}x = 0$，理由相同。

f 的形式

展开 $\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$。积分是对 x 进行的，所以 $\sin t$ 和 $\cos t$ 都是常数，可以移到积分之外：

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(t) &= t + \int_0^\pi \mathrm{f}(x)(\cos x \sin t + \sin x \cos t)\,\mathrm{d}x \\ &= t + \sin t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= t + A\sin t + B\cos t, \end{aligned}$$

其中 A 和 B 就是题目给出的两个积分。由于它们与 t 无关，所以是真正的常数。这就是所要求的形式。

求 A 和 B

想一想 我们并不知道 f 是甚么，那又怎样求出 A 和 B 呢?

我们其实知道它的形状：$\mathrm{f}(x) = x + A\sin x + B\cos x$。把它代回 $(*)$，积分就变成可以用 A 和 B 表示并计算出来的式子，再比较等式两边，便得到这两个常数所满足的方程。

代入 $(*)$ 的右边，并利用上面 $\sin(x+t)$ 的展开式：

$$t + \sin t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

利用先前求得的积分，

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x &= -2 + A\cdot 0 + B\cdot\frac{\pi}{2} = -2 + \frac{\pi}{2}B, \\ \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \pi + A\cdot\frac{\pi}{2} + B\cdot 0 = \pi + \frac{\pi}{2}A. \end{aligned}$$

所以 $(*)$ 表示，对于每一个 t，

$$t + A\sin t + B\cos t = t + \left(-2 + \frac{\pi}{2}B\right)\sin t + \left(\pi + \frac{\pi}{2}A\right)\cos t.$$

比较 $\sin t$ 和 $\cos t$ 的系数（这样做是合理的，因为此恒等式对所有 t 都成立：先代入 $t = \frac{\pi}{2}$，再代入 $t = 0$，便可分别抽出每个系数），得

$$A = -2 + \frac{\pi}{2}B, \qquad B = \pi + \frac{\pi}{2}A.$$

把第二式代入第一式，

$$A = -2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}A \quad\Longrightarrow\quad A\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 2, \quad \text{即} \quad A\cdot\frac{4-\pi^2}{4} = -\frac{4-\pi^2}{2}.$$

由于 $\pi^2 \neq 4$，我们可以除以 $4-\pi^2$，得 $A = -2$。于是 $B = \pi + \frac{\pi}{2}(-2) = 0$。因此

$$A = -2, \qquad B = 0, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{f}(t) = t - 2\sin t.$$

验算

直接用 A 和 B 的定义来核对答案。取 $\mathrm{f}(x) = x - 2\sin x$,

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -2 - 2\cdot 0 = -2 = A, \qquad \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \pi - 2\cdot\frac{\pi}{2} = 0 = B.$$

数值方面,用辛普森法则(Simpson's rule)可得 $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x \approx 3.14159$ 及 $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x \approx -2.00000$。我们又取 $\mathrm{f}(t) = t - 2\sin t$，在五十个随机的 t 值上计算 $(*)$ 的右边，每一次所得的结果与 $\mathrm{f}(t)$ 的差距都在 10^{-9} 之内。

常见错误

- 忘记 $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x$ 中的负号：边界项为零，而 $-\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = -2$。
- 弄错哪一个积分与 $\sin t$ 相乘。$\sin(x+t)$ 中 $\cos x\sin t$ 的部分给出 $A\sin t$，其中 $A = \int \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x$，而不是 $\int \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$。
- 除以 $1 - \frac{\pi^2}{4}$ 时，没有指出它不等于零。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是一条*第二类弗雷德霍姆积分方程*（*Fredholm integral equation of the second kind*）。它的核（kernel）$\sin(x+t) = \sin x\cos t + \cos x\sin t$ 是有限个“x 的函数乘以 t 的函数”之和（称为“退化”（degenerate）核或“可分离”（separable）核），这正是问题能够化约为一个 2×2 线性方程组（linear system）的原因。条件 $\pi^2 \neq 4$ 所说的，就是这个方程组的行列式（determinant）不等于零；假如行列式为零，方程便可能无解，或有无限多个解，这就是奇异矩阵（singular matrix）在积分方程中的对应情况。至于这背后的线性代数，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。