详细解答

STEP II 2004，第 4 题

纯数学 · 几何中的最优化

STEP II 2004，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

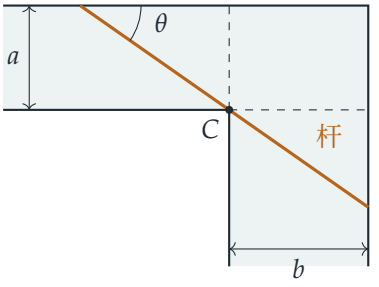
step.maths.org/questions/04-s2-q4

关键思路

无论怎样搬，杆（或桌子）都要由指向一条走廊的方向，转到指向另一条走廊的方向，所以在某一刻，它与墙壁所成的角必会取遍两者之间的每一个角 θ。对固定的角度而言，空间最宽裕的位置就是刚好擦过内角的那条直线，而这段长度用直角三角形（right-angled triangle）很容易算出。因此，物件能够转过弯角，当且仅当它的长度不超过这些长度在所有角度之中的最小者，而微积分（calculus）正好可以求出这个最小值（minimum）。

解答

以下一律把外角放在原点（origin），外墙分别沿 $y = 0$（阔度为 a 的走廊，向左延伸）和 $x = 0$（阔度为 b 的走廊，向下延伸）。于是内角位于 $C = (-b, -a)$。



第 (i) 部分

假设在某一刻，杆与 a 走廊的墙壁成锐角（acute angle）θ，并如图所示由外墙 $y = 0$ 向下斜向外墙 $x = 0$。

*角度为 θ 时最长的线段。*取通过 C 而倾角为 θ 的直线。由 C 向上到墙 $y = 0$，垂直升高了 a，所以这一段的长度是 $a\operatorname{cosec}\theta$；由 C 横向到墙 $x = 0$，水平移动了 b，所以这一段的长度是 $b\sec\theta$。因此，这条直线夹在两道外墙之间的弦（chord）的长度为

$$f(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta.$$

任何其他倾角为 θ 而由一条走廊伸入另一条走廊的直线，都必须在 C 的外侧经过（否则它会穿过内墙）。这样的直线与两道外墙围出一个较小的相似（similar）直角三角形，所以它在外墙之间的弦比 $f(\theta)$ 短。另外，假如此刻杆完全位于 a 走廊之内，它就容纳在一条阔度为 a 的长带里，所以 $L\sin\theta \le a$，由此得 $L \le a\operatorname{cosec}\theta < f(\theta)$；同理，假如它完全位于 b 走廊之内，则 $L \le b\sec\theta < f(\theta)$。无论哪一种情况，都有

$$L \le f(\theta) \quad \text{对杆所经过的每一个角 } \theta \text{ 均成立。}$$

当杆由沿着第一条走廊转到沿着第二条走廊时，θ 由接近 0 连续地变到接近 $\frac{1}{2}\pi$，所以它会取遍其间的每一个值。因此 $L \le f(\theta)$ 对*每一个* $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 都成立，也就是说，L 不超过 f 的最小值。

*求 f 的最小值。*求导（differentiate）得

$$f'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b\sin^3\theta - a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

这个式子等于零，当且仅当 $\tan^3\theta = a/b$；由于 tan 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上递增，这个方程在该区间内只有一个解 α。f' 的正负号与 $b\tan^3\theta - a$ 相同，在 α 之前为负，之后为正，所以 α 给出最小值。（此外，在区间两端均有 $f \to \infty$。）在 $L \le f(\theta)$ 中取 $\theta = \alpha$，得

$$L \le a\operatorname{cosec}\alpha + b\sec\alpha, \qquad \tan^3\alpha = \frac{a}{b},$$

这正是所要证明的。

第 (ii) 部分

现在由桌子的长边担当杆的角色。桌子的内侧长边位于一条倾角为 θ 的直线上，外侧长边则位于与之平行、向外角方向再远 w 的直线上。桌子外侧的两个角都必须位于外墙之内。

*外侧长边可用的空间。*设一条倾角为 θ 的直线与外角 O 的距离为 d，它在 O 处截出一个直角三角形，其斜边（hypotenuse）为 c（即两墙之间的弦），两条直角边为 $c\cos\theta$ 和 $c\sin\theta$，由 O 所作的高为 d。这个三角形面积的两倍既等于 $c\cos\theta \cdot c\sin\theta$，又等于 $c\,d$，所以

$$c = \frac{d}{\sin\theta\cos\theta} = 2d\operatorname{cosec}2\theta.$$

可见弦长与直线到 O 的距离成正比。因此，把直线向内（即向 O 的方向）移动 w，它的弦便会缩短 $2w\operatorname{cosec}2\theta$。

想一想 为甚么外侧长边必须容纳在两道外墙之间，而且是在比通过 C 的直线再靠内 w 的那条直线上?

内侧长边不能越过内角，所以它位于通过 C 的直线上，或在该直线的外侧。于是外侧长边所在的直线至少再向外 w，其弦长至多为 $f(\theta) - 2w\operatorname{cosec} 2\theta$。（两条短边由外侧的两个角向内伸展，与长边垂直，并且留在走廊之内，所以不会带来额外的限制。）假如整张桌子都位于 a 走廊之内，则它横跨长带的高度满足 $l\sin\theta + w\cos\theta \le a$。由此得出的上界 $l \le (a - w\cos\theta)\operatorname{cosec}\theta$ 比下文的 $g(\theta)$ 小了 $(b - w\sin\theta)\sec\theta > 0$，这是因为 $w < b$。b 走廊的情况亦相同。所以，与第 (i) 部分完全一样，要成功搬过弯角，必须有 $l \le g(\theta)$ 对所有 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 成立，其中

$$g(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta - 2w\operatorname{cosec} 2\theta.$$

（桌子必须比两条走廊都窄，即 $w < a$ 且 $w < b$，否则它连沿走廊移动也办不到。）

求 g 的最小值。由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\operatorname{cosec} 2\theta = -\dfrac{2\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta}$，

$$g'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{4w\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

两边乘以 $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta > 0$。于是 $g'(\theta) = 0$ 当且仅当

$$-a\cos^3\theta + b\sin^3\theta + w\cos 2\theta = 0, \qquad \text{即} \qquad w\cos 2\theta = \cos^3\theta\,(a - b\tan^3\theta).$$

利用 $\cos 2\theta = \cos^2\theta\,(1 - \tan^2\theta)$ 改写，再除以 $\cos^2\theta$。假如 $\theta = \frac{1}{4}\pi$，方程便会变成 $0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a - b)$，但 $a \ne b$，所以这不可能。因此在驻点（stationary point）处 $\tan^2\theta \ne 1$，我们可以除以 $1 - \tan^2\theta$，得到

$$w = \left(\frac{a - b\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta}\right)\cos\theta.$$

当 $\theta \to 0^+$ 时，$g(\theta) \approx (a - w)/\theta \to +\infty$，因为 $w < a$；同理，当 $\theta \to \frac{1}{2}\pi^-$ 时 $g \to +\infty$，因为 $w < b$。所以连续（continuous）函数 g 在区间内部的某一点取得最小值，而在该点 $g' = 0$。把这一点记为 β；它满足上面列出的方程。在 $l \le g(\theta)$ 中取 $\theta = \beta$，得

$$l \le a\operatorname{cosec}\beta + b\sec\beta - 2w\operatorname{cosec} 2\beta,$$

这正是所要证明的。（事实上，对方程的任何一个根 β 都有 $l \le \min g \le g(\beta)$，所以题目指的是哪一个根并无影响。）

验算

► 在第 (ii) 部分中取 $w = 0$，便得 $\tan^3\beta = a/b$ 以及第 (i) 部分的上界，与预期相符。

- 在第 (i) 部分中，$\sin\alpha = a^{1/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}$ 而 $\cos\alpha = b^{1/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}$，所以上界是 $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$。当 $a=1$，$b=8$ 时，这个值是 $5^{3/2}\approx 11.18$，而以数值方法搜索 f 的最小值，结果亦与此吻合。
- 我们随机选取了数百组 $a \neq b$ 和 $w < \min(a,b)$，以穷举法求出 g 的最小值，并确认取得最小值的角度满足关于 β 的方程。我们亦直接用坐标核对了各弦的长度。

常见错误

- 求了 f 的最大值而不是最小值。杆必须挨得过最差的角度，所以上界是可用长度的最小值。
- 以为受外墙限制的是桌子的内侧长边。其实被挤压的是外侧长边，它位于距离外角近 w 的那条直线上。
- 除以 $1-\tan^2\beta$ 时，没有留意到这一步需要 $a \neq b$。

STEP 之外

第 (i) 部分是经典的“梯子转弯”问题，其答案 $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$ 与星形线（astroid）有关：通过内角的各条直线扫出一条包络线（envelope）。第 (ii) 部分则是搬沙发问题（moving sofa problem）的一个小特例：在阔度为一个单位的直角弯角中，能够搬过去的图形之中，面积最大的是哪一个？这个问题由 Leo Moser 于 1966 年提出，在其后的大部分岁月里一直未能完全解决。如果想做更多这类几何与微积分交汇的题目，可以试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。