详细解答

STEP II 2004，第 3 题

纯数学 · 曲线描绘

> **STEP II 2004，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q3

关键思路

一切都源自同一条曲线。对于 C，先把导数（derivative）彻底因式分解：重复因式 $(x-2)$ 在求导之后仍然保留，余下的只是一个二次式。其余两条曲线都是由 C 建构出来的，毋须从头做起：在 (i) 中取 $y=\pm\sqrt{f(x)}$，在 (ii) 中则把 x^2 代入 f。要留意 f 在哪里取正值、在哪里有单根（simple root）、在哪里有重根（repeated root）；曲线的形状正是由这些细节决定的。

解答

设 $f(x)=x(x+1)(x-2)^4$，则 C 就是 $y=f(x)$。

C 的驻点

利用乘积法则（product rule），并抽出公因式 $(x-2)^3$，

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)(x-2)^4 + 4x(x+1)(x-2)^3 \\ &= (x-2)^3[(2x+1)(x-2)+4x^2+4x] \\ &= (x-2)^3(6x^2+x-2) \\ &= (x-2)^3(3x+2)(2x-1). \end{aligned}$$

所以驻点（stationary point）位于 $x=-\frac{2}{3}$、$x=\frac{1}{2}$ 和 $x=2$，而

$$f(-\tfrac{2}{3})=(-\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})(-\tfrac{8}{3})^4=-\frac{8192}{729}, \qquad f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot(-\tfrac{3}{2})^4=\frac{243}{64}, \qquad f(2)=0.$$

要判别这些驻点的类型，可考察 f' 各因式的正负号：

	$x < -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(3x+2)(2x-1)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

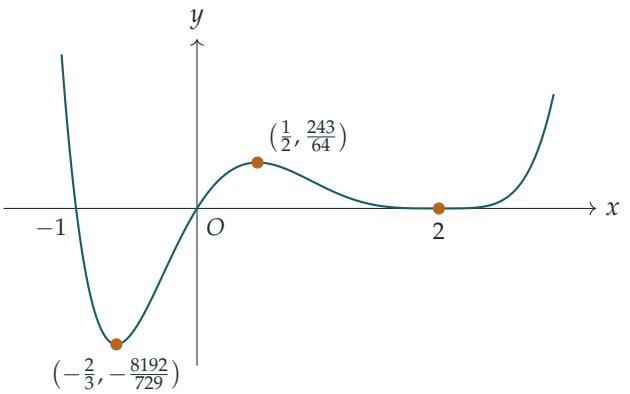
因此

- $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8192}{729}\right)$ 是极小点（minimum）（f' 由 $-$ 变为 $+$）；
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{243}{64}\right)$ 是极大点（maximum）（f' 由 $+$ 变为 $-$）；
- $(2, 0)$ 是极小点（f' 由 $-$ 变为 $+$）。

最后一个即使不用微积分也显而易见：在 $x = 2$ 附近 $f(x) \geq 0$，因为在那里 $x(x+1) > 0$，而 $(x-2)^4 \geq 0$。

描绘 C

曲线在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 处穿过 x 轴（两者都是单根，斜率分别为 $f'(-1) = -81$ 和 $f'(0) = 16$），并在 $x = 2$ 处与该轴相切。在 $x = 2$ 附近，$f(x) \approx 2 \cdot 3\,(x-2)^4 = 6(x-2)^4$，所以曲线在那里非常平坦。由于 f 是一个 6 次多项式，而且首项系数为正，$y \to +\infty$ 当 $x \to \pm\infty$。草图中的纵轴比例经过压缩。



第 (i) 部分

现在 $y^2 = f(x)$，所以 $y = \pm\sqrt{f(x)}$。以下三点足以确定曲线的形状。

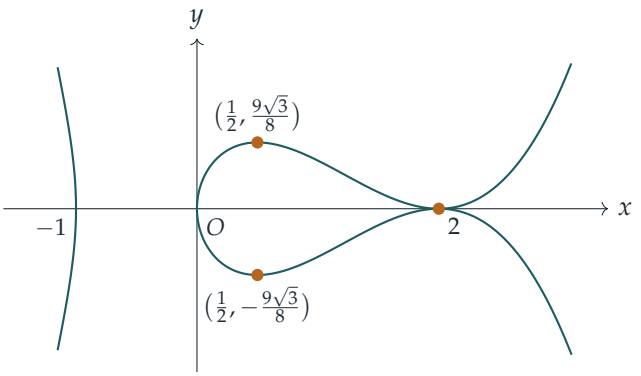
- *曲线存在的范围*。我们需要 $f(x) \geq 0$，由 C 可知这表示 $x \leq -1$ 或 $x \geq 0$。在 $-1 < x < 0$ 的范围内没有曲线。
- *对称性*。把 y 换成 $-y$，方程不变，所以曲线关于 x 轴对称。只需描绘上半部分 $y = \sqrt{f(x)} = (x-2)^2\sqrt{x(x+1)}$，再作反射即可。

- 驻点。对于 $y=\sqrt{f}$，当 $f>0$ 时有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f'/(2\sqrt{f})$，所以上半部分的驻点恰好出现在 $f'=0$ 且 $f>0$ 之处。这样只剩下 $x=\frac{1}{2}$（$x=-\frac{2}{3}$ 这一点在定义域之外），于是在 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{243/64}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ 有一个极大点，而在下半部分的 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$ 有一个极小点。

想一想 在 $f=0$ 的三点 $(-1,0)$、$(0,0)$ 和 $(2,0)$，曲线会怎样?

在单根处，例如 $x=0$，$f(x)\approx 16x$，所以在原点附近 $y^2\approx 16x$：这是一条横卧的抛物线，曲线穿过横轴时的切线是铅垂的。在 $x=-1$ 处情况相同，那里 $y^2\approx 81(-1-x)$。在重根 $x=2$ 处，$y^2\approx 6(x-2)^4$，所以 $y\approx \pm\sqrt{6}\,(x-2)^2$：这是两段形如抛物线的弧，一段在横轴之上，一段在横轴之下，两者都在 $(2,0)$ 与 x 轴相切。因此上下两半在该处相遇，并有共同的水平切线；在 $(2,0)$ 处，上半部分取得极小值，下半部分取得极大值。

当 $|x|$ 很大时，$y\approx\pm|x|^3$。所以曲线包括一个由 $(0,0)$ 到 $(2,0)$ 的闭合环，它在 $(2,0)$ 处收窄成一点，然后延伸为两条向右张开的分支；另外还有独立的一段，经过 $(-1,0)$ 并向左张开。



第 (ii) 部分

这里 $y=x^2(x^2+1)(x^2-2)^4=f(x^2)$。以下两点观察已解决了大部分问题。

- 曲线关于 y 轴对称，因为 x 只以 x^2 的形式出现。
- 当 x 走遍 $[0,\infty)$ 时，$u=x^2$ 亦递增地走遍 $[0,\infty)$，所以对于 $x\geq 0$，这条曲线就是 C 中 $x\geq 0$ 的部分，只是重新参数化而已。特别是处处都有 $y\geq 0$，而 C 中对应负 x 的一段（包括其极小点）完全不起作用。

由链式法则（chain rule），

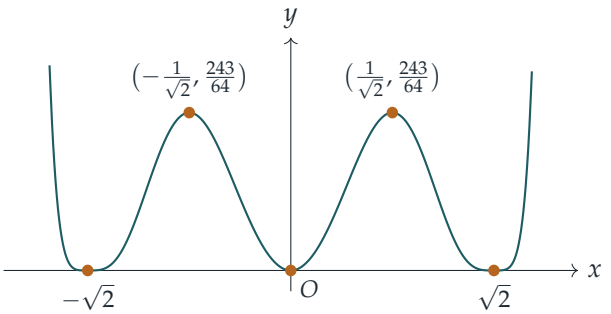
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\,f'(x^2) = 2x\,(x^2-2)^3(3x^2+2)(2x^2-1),$$

当 $x=0$、$x^2=\frac{1}{2}$ 或 $x^2=2$ 时，上式等于零（因式 $3x^2+2$ 永不为零）。在 $u\geq 0$ 上，f

由 0 上升至 $u = \frac{1}{2}$ 处的极大值，再下降至 $u = 2$ 处的 0，之后一直上升；而对于 $x \geq 0$，$u = x^2$ 保持这个次序。所以驻点为

- 位于 $(0,0)$ 的极小点，该处 $y \approx 16x^2$；
- 位于 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{243}{64}\right)$ 的极大点；
- 位于 $(\pm\sqrt{2}, 0)$ 的极小点，曲线在该处非常平坦地与横轴相切：$y \approx 384\,(x \mp \sqrt{2})^4$。

当 $|x|$ 很大时，$y \approx x^{12}$，上升得极为陡峭。



验算

先对导数作一个简单的合理性检查：在 $x = 0$ 处，$f(x) = x(x+1)(x-2)^4 \approx 16x$，而确实有 $f'(0) = (-8)(2)(-1) = 16$。数值验算方面，在随机选取的点上把 f' 的因式分解与有限差分（finite difference）导数比较，结果吻合；又得出 $f(-\frac{2}{3}) \approx -11.237$ 和 $f(\frac{1}{2}) = 3.796875$，并求得 $\sqrt{f}$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 $1.94856\ldots = \frac{9\sqrt{3}}{8}$，在 $x = 0.5$ 处取得。至于 (ii)，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 在 $x \approx \pm 0.707$ 和 ± 1.414（以及 0）处变号，与预期一致。

常见错误

- 先把 f 展开才求导。这样 f' 会是一个看不出任何因式的五次式；把 $(x-2)^3$ 留在括号外，就只需解一个二次方程。
- 在 (i) 中，于 $(0,0)$ 和 $(-1,0)$ 画出尖点（cusp）或折角。在 f 的单根处，$y^2 = f(x)$ 的切线是铅垂的。
- 在 (ii) 中，照搬 C 在 $x = -\frac{2}{3}$ 处的极小点。由于 $x^2 \geq 0$，只会用到 C 中 $x \geq 0$ 的部分，而 y 永不为负。

STEP 之外

$y^2 = f(x)$ 在 f 的根附近的表现，正是研究代数曲线（algebraic curve）奇点（singular point）的起点：单根给出一个带铅垂切线的光滑点，而重根则给出两条分支相遇之处，如 $(2,0)$ 的情况。当 f 是三次式时，曲线 $y^2 = f(x)$ 称为*椭圆曲线*（*elliptic curves*），是现代数论的核心对象。若想仔细了解曲线描绘背后的微积分（单调性（monotonicity）、导数的正负号和链式法则），可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。