详细解答

STEP II 2004，第 2 题

纯数学 · 二次不等式

> **STEP II 2004，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q2

关键思路

绝对值（modulus）是唯一棘手的地方，而只要设 $t = |x|$，它就会消失。由于 $x^2 = |x|^2$，原不等式便化为一个关于 t 的普通二次不等式（quadratic inequality），并附带条件 $t \geq 0$。接着只要配方（completing the square），或者考察判别式（discriminant），一切便一目了然。t 的每一个容许区间都对应 x 的两个区间，分别位于原点两侧。

解答

以下一律设 $t = |x| \geq 0$。由于 $x^2 = t^2$，不等式 $(*)$ 正好等价于

$$q(t) = t^2 - \alpha t + 2 < 0, \qquad t = |x| \geq 0.$$

当 $|\alpha| < 2\sqrt{2}$ 时无解

配方得

$$q(t) = \left(t - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

若 $|\alpha| < 2\sqrt{2}$，则 $\alpha^2 < 8$，故 $2 - \frac{\alpha^2}{4} > 0$。平方项永不为负，所以对任何实数 t 都有 $q(t) > 0$，对 $t = |x|$ 自然也成立。因此对所有 x 均有 $x^2 - \alpha|x| + 2 > 0$，没有任何 x 的值满足 $(*)$。

$\alpha = 3$ 的情况

此时 $q(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$，它恰好在 $1 < t < 2$ 时为负。所以 $(*)$ 成立当且仅当 $1 < |x| < 2$，解集为

$$\{x : -2 < x < -1\} \cup \{x : 1 < x < 2\}.$$

长度之和 S

设 $\alpha > 2\sqrt{2}$。则 $\alpha^2 > 8$，故 q 有两个相异实根

$$t_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2}, \qquad t_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2},$$

而且由于 q 的首项系数为正，$q(t) < 0$ 恰好在 $t_1 < t < t_2$ 时成立。

> **想一想** 区间 $t_1 < t < t_2$ 会不会有一部分落在 t 为负的范围？我们需要担心这一点吗？

不需要。两根之积为 $t_1 t_2 = 2 > 0$，两根之和为 $t_1 + t_2 = \alpha > 0$，所以两根皆为正数。因此整个区间 (t_1, t_2) 都位于 $t > 0$ 之内，其中每一个 t 值都确实是 $|x|$ 可取的值。

所以 $(*)$ 成立当且仅当 $t_1 < |x| < t_2$，即

$$-t_2 < x < -t_1 \qquad \text{或} \qquad t_1 < x < t_2.$$

这是两个互不相交的区间（因为 $t_1 > 0$），长度各为 $t_2 - t_1 = \sqrt{\alpha^2 - 8}$。因此

$$S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}.$$

由于 $\alpha^2 - 8 < \alpha^2$ 且 $\alpha > 0$，取正平方根得 $\sqrt{\alpha^2 - 8} < \alpha$，所以

$$S < 2\alpha,$$

这正是所要证明的。

S 对 α 的图像

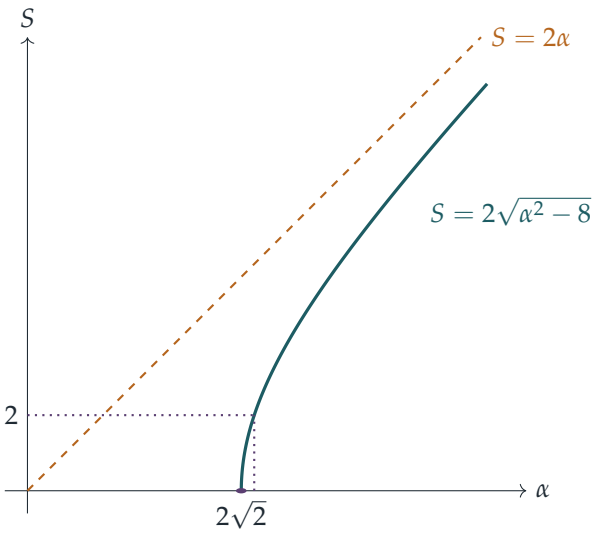
函数 $S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}$ 的定义域为 $\alpha > 2\sqrt{2}$（当 $\alpha \le 2\sqrt{2}$ 时根本没有任何区间：在 $\alpha = 2\sqrt{2}$ 时有 $q(t) = (t - \sqrt{2})^2 \ge 0$，而只要 $\alpha \le 0$，对所有 $t \ge 0$ 都有 $q(t) \ge 2$）。它的主要特征如下：

- 当 $\alpha \to 2\sqrt{2}^{+}$ 时 $S \to 0$，而 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 8}}$ 在该处趋向无穷大：曲线由 $(2\sqrt{2}, 0)$ 出发，该点的切线是铅垂的。
- S 是递增的，而且 $\dfrac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\dfrac{16}{(\alpha^2 - 8)^{3/2}} < 0$，所以曲线是凹的（concave）。

- 直线 $S = 2\alpha$ 是渐近线（asymptote），曲线从下方趋近它：由于 $(2\alpha - S)(2\alpha + S) = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 8) = 32$,

$$2\alpha - S = \frac{32}{2\alpha + S} \to 0 \quad \text{当} \alpha \to \infty.$$

事实上 $\frac{\alpha^2}{8} - \frac{S^2}{32} = 1$, 所以这个图像是双曲线 (hyperbola) 的四分之一, 渐近线为 $S = 2\alpha$。



验算

- 当 $\alpha = 3$ 时，公式给出 $S = 2\sqrt{1} = 2$，与 $(-2, -1)$ 和 $(1, 2)$ 这两个长度各为 1 的区间吻合（即图中以虚点线标示、位于 $\alpha = 3$ 的那一点)。
- 当 $\alpha = 5$ 时，$S = 2\sqrt{17} \approx 8.246$；以数值方法量度 $[-20, 20]$ 内满足 $x^2 - 5|x| + 2 < 0$ 的 x 所组成的集合，所得的值相同，而且明显小于 $2\alpha = 10$。
- 当 α 很大时，$2\alpha - S \approx 8/\alpha$：在 $\alpha = 100$ 时，两者相差 $0.0800\ldots$。

常见错误

- 忘记 $|x|$ 的每一个区间对应 x 的两个区间，因而得出 $S = \sqrt{\alpha^2 - 8}$。
- 把 $\alpha = 3$ 的答案只写成 $1 < x < 2$，漏掉了负的那一半。
- 使用判别式时，没有指出关于 t 的两个根皆为正数；当 $\alpha < 0$ 时，同样的判别式条件却完全没有解，因为两个根都是负数。

STEP 之外

函数 $x \mapsto x^2 - \alpha|x| + 2$ 是偶函数（even function），所以它的解集是对称的，而长度 S 就是该函数取负值的集合的测度（measure）。量度由不等式所定义的集合的大小，正是测度论（measure theory）和勒贝格积分（Lebesgue integration）的起点，大学二年级的分析课程会学到这些内容。若想细读本题用到的极限、导数和不等式的严谨论述，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。