详细解答

STEP II 2004，第 14 题

概率与统计 · 容斥原理

STEP II 2004，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s2-q14

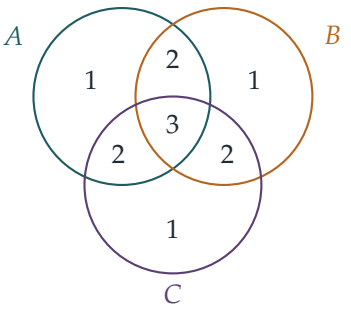
关键思路

容斥原理（inclusion–exclusion）是一种修正计数的方法：把 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ 加起来时，重叠的部分被多算了，而两两相交与三者相交的项正好把计数修正过来。对于布甸这一题，考虑补事件（complement）会容易得多：设 E_i 为布甸 i 是空的这一事件（event）。某个布甸是空的概率是一个并集（union）的概率，这正是容斥原理所处理的情况，而且各个 E_i 的每一个交集（intersection）的概率都十分简单。

解答

容斥公式

把 $A \cup B \cup C$ 分成温氏图（Venn diagram）中七个互不相交（disjoint）的区域。任何由若干个完整区域组成的事件，其概率等于这些区域的概率之和，所以只需验证每个区域在等式右边都恰好被计算一次。



图中的数字表示每个区域落在 A、B、C 当中的多少个之内。取一个恰好落在三个事件中

k 个之内的区域，其中 $k = 1$、2 或 3。

- 它出现在 $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C)$ 这些项当中的 k 项。
- 它出现在 $\binom{k}{2}$ 个两两交集之中，因为（举例说）它落在 $A \cap B$ 之内，当且仅当它同时落在 A 和 B 之内。
- 只有当 $k = 3$ 时，它才出现在三者的交集之中，即出现 $\binom{k}{3}$ 次。

因此它被计算的净次数为

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = \begin{cases} 1 - 0 + 0 = 1 & (k = 1), \\ 2 - 1 + 0 = 1 & (k = 2), \\ 3 - 3 + 1 = 1 & (k = 3). \end{cases}$$

$A \cup B \cup C$ 的每个区域都恰好被计算一次，而并集以外的区域则完全没有被计算。所以等式右边等于 $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$。

（另一个等价的做法：把两个事件的法则 $\mathrm{P}(X \cup Y) = \mathrm{P}(X) + \mathrm{P}(Y) - \mathrm{P}(X \cap Y)$ 应用于 $X = A \cup B$ 和 $Y = C$，然后再应用于 $(A \cap C) \cup (B \cap C)$。）

每个布甸最少有一枚六便士硬币

模型。彻底搅拌后再平均分成几份，意思是每枚六便士硬币（sixpence）落入布甸 1、2 或 3 的概率各为 $\frac{1}{3}$，并且与其他硬币独立（independent）。取 $r \geq 1$。

设 E_i 为布甸 i 内没有六便士硬币这一事件。

- 当全部 r 枚硬币都没有落入布甸 1 时，E_1 发生。每枚硬币没有落入布甸 1 的概率是 $\frac{2}{3}$，所以由独立性可得 $\mathrm{P}(E_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^r$，$E_2$、$E_3$ 亦同理。
- 当每枚硬币都落入布甸 3 时，$E_1 \cap E_2$ 发生，所以 $\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^r$，其余各对亦同理。
- $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ 要求三个布甸全是空的，但由于 $r \geq 1$，这是不可能的。所以它的概率是 0。

由容斥原理，最少有一个布甸是空的概率为

$$p_r = \mathrm{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r.$$

每个布甸最少有一枚六便士硬币的概率就是其补事件的概率：

$$1 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \frac{3^r - 3 \cdot 2^r + 3}{3^r}.$$

最少六枚六便士硬币

我们要找出使 $p_r < \frac{1}{3}$ 的 r 值。直接计算可得

$$p_5 = \frac{3\cdot 32 - 3}{243} = \frac{93}{243} = \frac{31}{81} > \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, \qquad p_6 = \frac{3\cdot 64 - 3}{729} = \frac{189}{729} = \frac{7}{27} < \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

为了确定没有更小的 r 符合要求，我们证明 p_r 是递减的。对于 $r \geq 1$，

$$p_{r+1} - p_r = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r\left(\tfrac{2}{3} - 1\right) - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r\left(\tfrac{1}{3} - 1\right) = -\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \left(\tfrac{1}{3}\right)^r\left(2 - 2^r\right),$$

当 $r = 1$ 时此式为 0，当 $r \geq 2$ 时为负数。所以 $p_1 = p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 = \frac{31}{81}$，而每个 $r \leq 5$ 都有 $p_r > \frac{1}{3}$。（当 $r = 0$ 时，每个布甸必然是空的。）因此，只有当 $r \geq 6$ 时，某个布甸没有六便士硬币的机会才会低于 $\frac{1}{3}$；又由于 p_r 持续递减，每个 $r \geq 6$ 确实都有 $p_r \leq p_6 < \frac{1}{3}$。所以厨师必须使用 6 枚或以上的六便士硬币，这正是所要证明的。

每个布甸有两枚六便士硬币

现在 $r = 6$。设 T 为每个布甸恰好有两枚六便士硬币这一事件，S 为每个布甸最少有一枚这一事件。由上一部分，

$$\mathrm{P}(S) = 1 - p_6 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}.$$

把六枚（可区分的）六便士硬币分配到各个布甸，共有 $3^6 = 729$ 种等可能的方法。其中每个布甸得到两枚的方法数目，就是把六件物件分成三个有标号的对的方法数目，即 $\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$。所以 $\mathrm{P}(T) = \frac{90}{729} = \frac{10}{81}$。

> ? **想一想** 为甚么 $\mathrm{P}(T \cap S)$ 就是 $\mathrm{P}(T)$?

如果每个布甸都有两枚六便士硬币，那么每个布甸当然最少有一枚，所以 $T \subseteq S$，而 $T \cap S = T$。因此

$$\mathrm{P}(T \mid S) = \frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{10/81}{20/27} = \frac{10}{81}\cdot\frac{27}{20} = \frac{1}{6}.$$

验算

对于 $r = 1$ 和 $r = 2$，公式给出每个布甸都有六便士硬币的概率为 0，这是对的：少于三枚硬币不可能令三个布甸都有硬币。对于 $r = 3$，公式给出 $\frac{27-24+3}{27} = \frac{2}{9}$，与直接计数所得的 $3!/3^3 = 6/27$ 吻合。对 $r \leq 9$ 逐一列举全部 3^r 种分配方法，结果与公式一致，并确认 $p_5 = \frac{31}{81} \approx 0.383$ 和 $p_6 = \frac{7}{27} \approx 0.259$，同时得出最终答案 $\frac{1}{6} \approx 0.167$（模拟 200 000 次布甸制作所得的结果是 0.166）。

常见错误

- 把六便士硬币当作不可区分，并把 $6 = a + b + c$ 的 28 种写法视为等可能。它们并非等可能：$(2,2,2)$ 可以有 90 种出现方式，而 $(6,0,0)$ 只有一种。
- 只检查 $r = 6$ 和 $r = 5$。“必须使用 6 枚或以上”还要求每个更小的 r 都不符合要求，这就是单调性（monotonicity）那一步之所以重要的原因。
- 忘记三者的交集是空集，或者不加说明就把它的概率写成 $(0)^r$。

STEP 之外

对于 n 个事件的一般容斥原理，涉及所有 k 重交集的交错和，其证明用的正是上面的计数论证，当中用到 $\sum_{j\geq 1}(-1)^{j-1}\binom{k}{j} = 1$。把它应用于 n 个布匈，所数算的就是满射（surjection）的数目，并与第二类斯特灵数（Stirling numbers of the second kind）以及经典的优惠券收集问题（coupon-collector problem）相关。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）对容斥原理和这类占位问题（occupancy problem）有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。