详细解答

STEP II 2004，第 13 题

概率与统计 · 最优停止

STEP II 2004，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s2-q13

关键思路

逐次抽球去想。假设她已经安全取得 n 个白球，再抽一次的话，要么多得 £1，要么把手上的 £n 全部输掉，所以这一次抽球的期望（expected）效果很容易写出来。以 N 个球为目标时，总期望奖金会上升，当且仅当多抽那一球的期望得益为正，因此最佳目标就是该得益仍然非负的最后一个目标。

解答

全题假设 $1 \le r < b$，即最少有一个红球和最少有一个白球。（若 $r = 0$，她只需把所有球取出。）

下一次抽球的期望得益

假设她首 n 次抽到的都是白球。袋中现在有 $b-n$ 个球：r 个红球和 $b-n-r$ 个白球，每个球在下一次被抽出的机会均等（要还有白球剩下，须有 $n \le b-r-1$；无论如何 $b-n \ge r \ge 1$）。

- 抽到白球的概率（probability）为 $\dfrac{b-n-r}{b-n}$，她的奖金由 £n 变为 £$(n+1)$：得益为 $+1$。
- 抽到红球的概率为 $\dfrac{r}{b-n}$，她会失去本来可得的 £n：得益为 $-n$。

所以她下一次抽球的期望得益是

$$G_n = \frac{(b-n-r)\cdot 1 + r\cdot(-n)}{b-n} = \frac{b-r-n(r+1)}{b-n}.$$

分母为正，所以 $G_n = 0$ 当且仅当 $b - r = n(r+1)$，亦即

$$n = \frac{b-r}{r+1},$$

这正是所需的结果。更有用的是：当 $n < \dfrac{b-r}{r+1}$ 时 $G_n > 0$，而当 $n > \dfrac{b-r}{r+1}$ 时 $G_n < 0$。

最佳的取球数目

设 P_N 为首 N 次抽球全为白球的概率，并设 E_N 为她以取出 N 个球为目标时的总期望奖金。若该 N 个球全为白球，她得到 £N，否则一无所得，所以

$$E_N = NP_N.$$

? **想一想** 单次抽球的期望得益与总期望奖金 E_N 有甚么关系?

比较以 N 为目标和以 $N+1$ 为目标这两个方案。只有当首 N 个球全为白球时，两个方案才有分别（否则在两个方案下她都已经输掉），这情况出现的概率为 P_N；而在这情况下，多抽的一球使她的奖金改变，改变量的期望值为 G_N。因此

$$E_{N+1} - E_N = P_N G_N = P_N \frac{b-r-N(r+1)}{b-N}.$$

（亦可由 $P_{N+1} = P_N \cdot \frac{b-r-N}{b-N}$ 直接验证。）

当 $N \le b-r$ 时，我们有 $P_N > 0$，所以 $E_{N+1} - E_N$ 的正负号与 $b-r-N(r+1)$ 相同。记 $k = N+1$，这就是下式的正负号：

$$(b+1) - k(r+1).$$

设 $m = \dfrac{b+1}{r+1}$。那么当 $k < m$ 时 $E_k > E_{k-1}$，当 $k = m$ 时 $E_k = E_{k-1}$，而当 $k > m$ 时 $E_k < E_{k-1}$。所以数列（sequence）$E_0, E_1, E_2, \ldots$ 严格递增至 $E_{\lfloor m \rfloor}$（若 m 为整数，则出现相等的情况 $E_{m-1} = E_m$），然后严格递减，至少在 $k-1 \le b-r$ 的范围内如此。超出这范围后 $P_N = 0$ 且 $E_N = 0$，不会更好。

我们应该验证 $\lfloor m \rfloor$ 是一个合理的目标，即 $\lfloor m \rfloor \le b-r$。若 $b = r+1$，则 $m = \frac{r+2}{r+1}$，所以 $\lfloor m \rfloor = 1 = b-r$。若 $b \ge r+2$，则

$$(b-r)(r+1) - (b+1) = r(b-r-1) - 1 \ge r - 1 \ge 0,$$

所以 $m \le b-r$。无论哪种情况，E_N 的最大值都在

$$n = \left\lfloor \frac{b+1}{r+1} \right\rfloor,$$

取得，即 $\frac{b+1}{r+1}$ 的整数部分，这正是所需的结果。

无论采用甚么停止规则（stopping rule），这个目标也是她所能做到的最佳选择：在决定是否继续之前，她唯一能得知的就是至今抽出的每个球都是白球（否则游戏已经结束），所以任何规则都等同于预先选定一个数 N。

$r = 1$ 的情况

只有一个红球时，首 N 次抽球避开红球，当且仅当红球位于最后 $b - N$ 个位置之一，而各个位置的机会均等。所以

$$P_N = \frac{b-N}{b}, \qquad E_N = \frac{N(b-N)}{b}.$$

最佳目标是 $n = \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor$。

b 为偶数。这时 $\frac{b+1}{2} = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}$，所以 $n = \frac{b}{2}$，且

$$E_n = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}}{b} = \frac{b}{4}.$$

她的总期望奖金为 $£\frac{1}{4}b$，这正是所需的结果。

b 为奇数。这时 $n = \frac{b+1}{2}$，所以 $b - n = \frac{b-1}{2}$，且

$$E_n = \frac{\frac{b+1}{2} \cdot \frac{b-1}{2}}{b} = \frac{b^2-1}{4b}.$$

她的总期望奖金为 $£\dfrac{b^2-1}{4b}$。（这里 $m = \frac{b+1}{2}$ 是整数，所以以 $\frac{b-1}{2}$ 个球为目标会得到相同的值，由对称的公式 $N(b-N)/b$ 可以看出。）

验算

- 当 $r = 1$ 时，$E_N = N(b-N)/b$ 是关于 N 的开口向下的抛物线（parabola），顶点在 $N = b/2$，与两个答案都吻合：b 为偶数时，在顶点处恰好是 $b/4$；b 为奇数时则略小，为 $\frac{b}{4} - \frac{1}{4b}$。
- 取 $b = 7$,$r = 2$:公式给出 $n = \lfloor 8/3 \rfloor = 2$,而直接计算得 $E_0, \ldots, E_5 = 0,\ \frac{5}{7},\ \frac{20}{21},\ \frac{6}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{21}$，在 $N = 2$ 处达到最高。我们列举了球的全部 7! 种排列次序来确认这一点，并就每个 $b \le 24$，以完整的最优停止计算核对了 n 的公式。
- 当 $b = 9$，$r = 1$ 时，答案是 $\frac{80}{36} = \frac{20}{9} \approx 2.22$，刚好略低于 $\frac{9}{4}$。

常见错误

- 忘记了抽到红球会令她失去已取得的 $£n$，而把期望得益只写成 $\frac{b-n-r}{b-n}$。

- 混淆“已抽出 n 个球”与“以 n 个球为目标”：得益 G_n 在 $n = \frac{b-r}{r+1}$ 时为零，所以最佳目标要再多一个，即 $\frac{b-r}{r+1} + 1 = \frac{b+1}{r+1}$。
- 遗漏了 $\frac{b+1}{r+1}$ 为整数时的相等情况：这时 n 和 $n-1$ 同为最优。

STEP 之外

这是一个小型的最优停止（optimal stopping）问题，而所用的论证就是“向前看一步”（one-step look-ahead）法则：一旦再走一步的期望得益为负，便立即停止。只要问题是单调（monotone）的，这个法则就是最优的；所谓单调，是指一旦继续下去显得不利，其后便一直不利，正如本题中 G_n 随 n 递减。同样的想法会引伸到秘书问题（secretary problem），以及大学一、二年级概率论中的鞅（martingale）方法。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）是打好背后条件期望（conditional expectation）工具基础的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。