详细解答

STEP II 2004，第 11 题

力学 · 功率与阻力

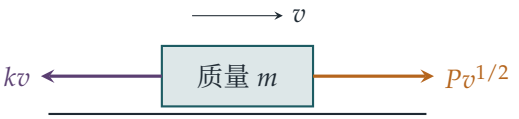
> **STEP II 2004，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q11

关键思路

功率（power）等于力乘以速率，所以引擎以全功率 $Pv^{3/2}$ 运作时，所施的推力为 $Pv^{1/2}$。由牛顿第二定律（Newton's second law）便得到一条含有 $\sqrt{v}$ 的微分方程（differential equation），而代换（substitution）$u = \sqrt{v}$ 可把它化为一阶线性方程（linear first-order equation），马上就能解出。引擎关掉之后，两列火车的速率各自按指数衰减（exponential decay），而第 (iii) 部分的窍门就是比较这两个衰减率。

解答

我们把每列火车看成沿水平直路轨运动的质点（particle）。引擎以全功率开动时，沿路轨方向的力有驱动力（driving force）和阻力（resistance）kv。



若引擎在速率为 v 时输出的功率为 H，则其驱动力为 H/v。所以在全功率下，A 所受的驱动力为 $Pv^{3/2}/v = Pv^{1/2}$，而 B 所受的驱动力为 $2Pv^{1/2}$。

第 (i) 部分

对于 A，沿路轨方向应用牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = Pv_A^{1/2} - kv_A.$$

设 $u = v_A^{1/2}$，则 $v_A = u^2$，且 $\dfrac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$。于是

$$2mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Pu - ku^2, \qquad \text{所以} \qquad 2m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = P - ku,$$

这里两边除以 u；由于火车一直在运动（$u > 0$），这样做是容许的。这是一条线性（而且可分离变量（separable））的方程：

$$\int \frac{2m\,\mathrm{d}u}{P - ku} = \int \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2m}{k}\ln(P - ku) = t + \text{常数},$$

所以 $P - ku = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-kt/2m}$，其中 C 为某个常数。（开始时 u 极小，故 $P - ku > 0$；而且它一直保持为正，因为解永远不会到达平衡值（equilibrium）$u = P/k$。）

想一想 “以极低的速率缓缓前进”告诉了我们甚么?

它给出了初始条件（initial condition）。在 $t = 0$ 时，两个速率都是正数（所以除以 u 并无问题），但小得可以忽略，因此我们取 $t = 0$ 时 $u = 0$。于是 $C = P$，而

$$u = \frac{P}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/2m}\right), \qquad \text{所以} \qquad v_A = \frac{P^2\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/2m}\right)^2}{k^2},$$

正是所要求的结果。（假如火车完全静止，$v \equiv 0$ 也会满足原来的方程，因为那时根本没有驱动力；这就是题目要让火车一开始已在缓慢移动的原因。）

对于 B，方程是 $2m\dfrac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = 2Pv_B^{1/2} - kv_B$。用同一个代换可得 $4m\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2P - ku$，这正是 A 的方程，只是把 P 换成 $2P$、m 换成 $2m$。所以

$$v_B = \frac{4P^2\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/4m}\right)^2}{k^2}.$$

第 (ii) 部分

两个速率都是正数，所以 $9v_A = 4v_B$ 等价于 $3\sqrt{v_A} = 2\sqrt{v_B}$。设 $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$，则 $\mathrm{e}^{-kt/2m} = x^2$，而且当 $t > 0$ 时 $0 < x < 1$。条件变成

$$\frac{3P}{k}\left(1 - x^2\right) = \frac{4P}{k}(1 - x) \quad \Longrightarrow \quad 3(1 - x)(1 + x) = 4(1 - x).$$

由于 $x \neq 1$，我们可以除以 $1 - x$，得 $3 + 3x = 4$，所以 $x = \frac{1}{3}$（即 $t = \frac{4m}{k}\ln 3$）。于是 $1 - x^2 = \frac{8}{9}$，$1 - x = \frac{2}{3}$，所以

$$v_A = \frac{64P^2}{81k^2}, \qquad v_B = \frac{16P^2}{9k^2}.$$

简单验算一下：$9v_A = \frac{64P^2}{9k^2} = 4v_B$。

第 (iii) 部分

从引擎关掉的一刻起计算时间 τ，并设 $V_A = \frac{64P^2}{81k^2}$ 和 $V_B = \frac{16P^2}{9k^2}$ 为该刻的速率。这时只有阻力起作用：

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}\tau} = -kv_A, \qquad 2m\frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}\tau} = -kv_B,$$

所以

$$v_A = V_A\,\mathrm{e}^{-k\tau/m}, \qquad v_B = V_B\,\mathrm{e}^{-k\tau/2m}.$$

较重的火车 B 减速的指数率只有一半，所以把 v_B 平方，两个指数项便一致了：

$$v_B^2 = V_B^2\,\mathrm{e}^{-k\tau/m} = \frac{V_B^2}{V_A}\,v_A.$$

最后

$$\frac{V_B^2}{V_A} = \frac{256P^4}{81k^4}\cdot\frac{81k^2}{64P^2} = \frac{4P^2}{k^2},$$

所以 $v_B^2 = \dfrac{4P^2}{k^2}v_A$，即在其后的所有时刻都有 $k^2v_B^2 = 4P^2v_A$，正是所要求的结果。

验算

- 当 $t \to \infty$ 时，$v_A \to P^2/k^2$，这正是驱动力 $Pv^{1/2}$ 与阻力 kv 相等之处。同样地，$v_B \to 4P^2/k^2$，那里 $2Pv^{1/2} = kv$。
- 当 t 很小时，$v_A \approx P^2t^2/(4m^2)$，$v_B \approx P^2t^2/(4m^2)$：两列火车起步时并驾齐驱，这是应有的结果，因为两者每单位质量的驱动力都是 $Pv^{1/2}/m$。
- 取 $m = 1.7$、$P = 2.3$、$k = 0.9$，我们由一个极小的初速率出发，用数值方法（龙格—库塔法（Runge–Kutta））逐步计算两条运动方程，结果与第 (i) 部分的公式吻合至约 10^{-5}；在 $9v_A = 4v_B$ 的一刻，得 $\mathrm{e}^{-kt/4m} = 0.33333$、$v_A = 5.1602$ 和 $v_B = 11.6104$；关掉引擎后继续逐步计算，$k^2v_B^2$ 一直与 $4P^2v_A$ 相等（例如两秒后两者都是 37.8739）。

常见错误

- 把 $Pv^{3/2}$ 当作力。它是功率；力等于功率除以速率。
- 忘记第 (ii) 部分的条件是一条关于 $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$ 的二次方程，除了 $x = \frac{1}{3}$ 之外，还有根 $x = 1$（即 $t = 0$，此时两个速率皆为零）。

STEP 之外

代换 $u = \sqrt{v}$ 是求解伯努利方程（Bernoulli equation）$y' + p(t)y = q(t)y^n$ 的方法的一个特例；在该方法中，$u = y^{1-n}$ 总能给出一条线性方程。关于火车完全静止的那个备注，让我们初次窥见唯一性理论（uniqueness theory）：由于 $\sqrt{v}$ 在 $v = 0$ 处的斜率为无穷大，方程由 $v = 0$ 出发的解不止一个，皮卡－林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）解释了这个现象。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）涵盖了这两个课题；至于功率与阻力的力学，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。