详细解答

STEP II 2004，第 10 题

力学 · 斜面上的摩擦力

> **STEP II 2004，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q10

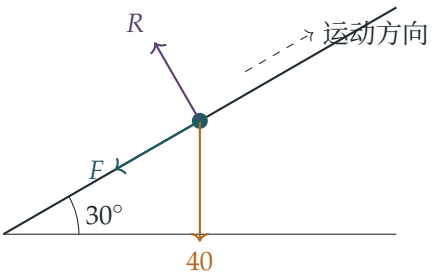
关键思路

摩擦力（friction）永远与运动方向相反，所以质点（particle）沿斜面向上滑与向下滑时的加速度（acceleration）并不相同。先求出这两个加速度：题目的数字经过挑选，结果十分整齐。然后 P 向上滑到停下，再滑回来，与仍在向上滑的 Q 相遇。把两个质点的位置都写成“在最高点以下的距离”，碰撞（collision）方程就成为一个平方差（difference of two squares）。

（印刷试卷的第 (i) 部分有一处误植：碰撞时间中的“b”应为 T。）

解答

我们把每个质点视为粗糙斜面（rough plane）上的质点，并以 x 表示由 A 沿 ℓ 向上量度的位置，取沿斜面向上为正方向。



垂直于斜面的方向没有加速度，所以法向反作用力（normal reaction）为

$$R = 4 \cdot 10 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\ \text{N},$$

而由于每个质点都在滑动，摩擦力达到极限值（limiting friction）：

$$F = \mu R = \frac{1}{5\sqrt{3}} \cdot 20\sqrt{3} = 4\,\text{N}.$$

重量沿斜面向下的分量是 $40\sin 30^\circ = 20\,\text{N}$。

向上运动时：摩擦力沿斜面向下，所以 $4a = -(20+4)$，减速度为 $6\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$。

向下运动时：摩擦力沿斜面向上，所以沿斜面向下的加速度为 $(20-4)/4 = 4\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$。

由于 $20 > 4$，质点停下后不会保持静止：极限摩擦力不足以把它留住，所以它会滑回下来。

第 (i) 部分

P 的运动。向上时，$v = 6 - 6t$，所以 P 在 $t = 1$ 停下，此时已走了 $\frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 1 = 3\,\text{m}$。当 $0 \le t \le 1$ 时，$x_P = 6t - 3t^2 = 3 - 3(1-t)^2$。其后 P 由 $x = 3$ 从静止开始以加速度 4 向下滑，所以

$$x_P = 3 - 2(t-1)^2 \qquad (t \ge 1),$$

此式一直成立，直至 P 回到 A，那时 $2(t-1)^2 = 3$，即 $t = 1 + \sqrt{3/2}$。

Q 的运动。与上述运动完全相同，只是时间推迟了 T：设 $u = t - T$，则

$$x_Q = 6u - 3u^2 = 3 - 3(1-u)^2 \qquad (0 \le u \le 1).$$

> ? **想一想** 两个质点会否在都仍向上运动时碰撞?

不会。当两者都向上运动时，Q 所走的正是 P 在 T 秒之前走过的路径，而沿这条路径 x 是递增的，所以 P 严格地在前面。它们只可能在 P 掉头之后相遇，即 $t \ge 1$ 之时。此外，Q 也不可能先到达自己的最高点（$x = 3$，在 $u = 1$ 时），因为那时 P 早已离开 $x = 3$，位于其下方。所以碰撞时 P 正在下滑，而 Q 正在上滑。

碰撞。设 $\tau = t - 1 \ge 0$ 为 P 掉头后所经过的时间。那么 $1 - u = 1 - (t - T) = T - \tau$，而由 $x_P = x_Q$ 得

$$2\tau^2 = 3(T-\tau)^2.$$

τ 和 $T - \tau = 1 - u$ 都是非负的（后者是因为 Q 仍在向上运动），所以可以取正平方根：

$$\sqrt{2}\,\tau = \sqrt{3}\,(T - \tau)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{3}\,T}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,T = (3-\sqrt{6})\,T,$$

其中利用 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$ 作有理化（rationalising）。因此碰撞发生在 P 抛出后

$$t = (3-\sqrt{6})\,T + 1$$

秒，正如所求。

余下要看看关于 T 的条件在哪里用到。这个时刻必须早于 P 回到 A 的时刻，所以需要 $\tau < \sqrt{3/2}$：

$$(3-\sqrt{6})\,T < \sqrt{\tfrac{3}{2}} \iff T < \frac{\sqrt{3/2}\,(3+\sqrt{6})}{3} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{\sqrt{9}}{3} = 1 + \sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

因为 $\sqrt{3/2}\cdot\sqrt{6} = 3$。这正是题目给出的条件。（同一个不等式亦保证 $t \geq T$，即 Q 已经抛出：$(3-\sqrt{6})T + 1 \geq T \iff T \leq 1/(\sqrt{6}-2) = 1+\sqrt{3/2}$。）

第 (ii) 部分

当 $T = 1+\sqrt{2/3}$ 时，

$$\tau = (3-\sqrt{6})\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 3-\sqrt{6}+3\sqrt{\tfrac{2}{3}}-\sqrt{6}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2 = 1,$$

所以碰撞发生在 $t = 2$。这个 T 值小于 $1+\sqrt{3/2}$，所以第 (i) 部分的结果适用。

因摩擦而损失的能量等于摩擦力乘以滑行的总距离，因为摩擦力的大小恒为 4 N，而且永远与运动方向相反。

- P 向上滑了 3 m，然后向下滑了 $2\tau^2 = 2$ m：合共 5 m。
- Q 尚未掉头，并且与 P 位于同一点，即 $x = 3-2 = 1$：它滑行了 1 m。

所以损失的能量是

$$4\times(5+1) = 24\text{ J}.$$

验算

用能量收支可以核实这个答案。起初的动能（kinetic energy）是 $2\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6^2 = 144$ J。在 $t=2$ 时，P 的速率是 $4\times 1 = 4$（动能 32 J）；Q 有 $u = 1-\sqrt{2/3}$，速率为 $6(1-u) = 6\sqrt{2/3}$，所以 $v^2 = 24$（动能 48 J）。两者都在斜面上 1 m 处，即升高了 $\frac{1}{2}$ m，势能（potential energy）增加了 $2\times 4\cdot 10\cdot\frac{1}{2} = 40$ J。而 $144-32-48-40 = 24$ J。另外，对随机选取的 $T < 1+\sqrt{3/2}$，以数值方法逐步模拟两个质点的运动，所得的碰撞时间与 $(3-\sqrt{6})T+1$ 吻合（例如当 $T\approx 1.816$ 时为 ≈ 2.000），因摩擦而损失的能量为 24.000 J。

常见错误

- P 向下滑时沿用向上滑时的加速度：摩擦力的方向已经逆转，所以应是 4，而不是 6。
- 忘记了 Q 所受的摩擦力：Q 也一直在滑动，它滑行的 1 m 贡献了 4 J。
- 在 $2\tau^2 = 3(T-\tau)^2$ 中取错平方根：正负号由 $\tau \geq 0$ 和 $T-\tau \geq 0$ 决定。

STEP 之外

摩擦力是非保守力（non-conservative force）最简单的例子：它所作的功取决于路径，而不仅取决于起点和终点，这就是为甚么我们需要的是滑行的总距离，而不是位移。这也解释了为甚么机械能（mechanical energy）在某些系统中守恒，在另一些系统中却不守恒；大学一年级的力学课程会用线积分（line integral）和势函数（potential）把这个想法严格地表述出来。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对功、保守力和摩擦力有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。