详细解答

STEP II 2004，第 1 题

纯数学 · 含根式的方程

STEP II 2004，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s2-q1

关键思路

每一条方程都含有 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{3x^2+1}$，所以设 $t=\sqrt{x}$（其中 $t\geq 0$），把前者化为多项式（polynomial）。然后把余下的平方根单独移到一边，平方一次。这样会得到一条关于 t 的四次方程（quartic），而且很容易因式分解（factorise），因为 $t=0$ 和 $t=1$ 必定是根。真正要花工夫的是最后一步：平方可能引入增根（false roots），所以我们只保留那些令被平方的一边不是负数的根。

解答

三条方程都需要 $x\geq 0$，$\sqrt{x}$ 才是实数，所以我们写 $x=t^2$，其中 $t\geq 0$。于是 $\sqrt{x}=t$，而 $3x^2+1=3t^4+1$。

平方这一步只在一个方向上成立。对于实数 A 和 B，

$$\sqrt{A}=B \iff A=B^2 \text{ 且} B\geq 0.$$

所以平方之后，我们必须检查右边在每一个根处是否非负。

第 (i) 部分

把根式单独移到一边，得

$$\sqrt{3t^4+1}=2t^2-t+1.$$

右边恒为正数：它的判别式（discriminant）是 $1-8<0$，而首项系数（leading coefficient）是正数。所以在这里平方不会有任何损失，平方后所得方程的每一个根都是真正的解。平

方得

$$3t^4+1=(2t^2-t+1)^2=4t^4-4t^3+5t^2-2t+1,$$
$$0=t^4-4t^3+5t^2-2t=t\,(t^3-4t^2+5t-2).$$

这个三次式在 $t=1$ 时等于零（因为 $1-4+5-2=0$），除去因式 $t-1$ 后得

$$t^3-4t^2+5t-2=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2).$$

所以 $t\,(t-1)^2(t-2)=0$，得 $t=0,1,2$。三个值都是非负的，所以

$$x=0,\quad x=1,\quad x=4.$$

验算一下：当 $x=4$ 时，我们得到 $\sqrt{49}+2-8-1=0$。

第 (ii) 部分

现在我们有

$$\sqrt{3t^4+1}=-t^2+2t+1.$$

平方得

$$3t^4+1=(-t^2+2t+1)^2=t^4-4t^3+2t^2+4t+1,$$
$$0=2t^4+4t^3-2t^2-4t=2t\,(t^3+2t^2-t-2).$$

把三次式的各项分组为 $t^2(t+2)-(t+2)$，得

$$2t\,(t+2)(t-1)(t+1)=0.$$

由于 $t\geq 0$，只剩下 $t=0$ 和 $t=1$。右边 $-t^2+2t+1$ 在这两处的值分别是 1 和 2，都是正数，所以两个根都是真正的解：

$$x=0,\quad x=1.$$

第 (iii) 部分

这一次

$$\sqrt{3t^4+1}=t^2+2t-1.$$

平方得

$$3t^4+1=(t^2+2t-1)^2=t^4+4t^3+2t^2-4t+1,$$
$$0=2t^4-4t^3-2t^2+4t=2t\,(t^3-2t^2-t+2).$$

把三次式分组为 $t^2(t-2)-(t-2)$，得

$$2t\,(t-2)(t-1)(t+1)=0.$$

非负的根是 $t=0,1,2$。

想一想 这三个值是否全都满足原来的方程?

不是。当 $t = 0$ 时，右边 $t^2 + 2t - 1$ 等于 -1，但平方根不可能是负数。所以 $t = 0$ 是增根，是由平方引入的。（直接验证：当 $x = 0$ 时，(iii) 的左边是 $1 - 0 - 0 + 1 = 2 \neq 0$。）当 $t = 1$ 和 $t = 2$ 时，右边分别是 2 和 7，都是正数，所以这两个根是真正的解。因此

$$x = 1, \quad x = 4.$$

(ii) 和 (iii) 之间有一个巧妙的联系。把 t 换成 $-t$，$-t^2 + 2t + 1$ 就变成 $-(t^2 + 2t - 1)$，而平方会消去负号。所以 (iii) 中平方后的方程，就是把 (ii) 中平方后的方程的 t 换成 $-t$ 所得的方程，它的根 $0, \pm 1, 2$ 正是 (ii) 的根 $0, \pm 1, -2$ 的相反数。

验算

把每个答案代入原来的方程。例如，在 (iii) 中代入 $x = 4$，得 $\sqrt{49} - 4 - 4 + 1 = 0$。在 $0 \leq x \leq 50$ 的范围内对每条方程的左边作细密的数值扫描，没有发现其他零点。在 (i) 中，左边在 $x = 1$ 处触及零但不变号，这与二重因式 $(t - 1)^2$ 吻合。

常见错误

- 忘记检查被平方那一边的正负号，因而在 (iii) 中保留了 $x = 0$。
- 除以 t（或除以 $\sqrt{x}$），因而在 (i) 和 (ii) 中漏掉了 $x = 0$ 这个根。
- 一边仍有两个平方根时就平方。应先把 $\sqrt{3x^2 + 1}$ 单独移到一边，这样平方一次便能把它消去。

STEP 之外

映射（map）$A \mapsto A^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是单射（injective），所以两边平方得到的只是蕴涵关系（implication），而不是等价关系（equivalence）。留意哪些步骤可逆，是每一个严谨解方程过程背后的习惯；到了分析学（analysis），这就变成“函数在甚么时候有反函数（inverse）、在哪个定义域（domain）上有反函数”的问题。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）对此有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。