详细解答

STEP I 2004，第 9 题

力学 • 抛体运动

STEP I 2004，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s1-q9

关键思路

第一部分是标准的“在最高点垂直速度为零”的计算。在隧道中，题目没有给出速率 u，但它也不是任意的：一旦选定 θ，要求路径通过 P 就确定了 u。因此我们消去 u，把最大高度写成只含 θ 的函数（以 $t = \tan\theta$ 表示最为方便），再问它何时保持在隧道顶之下。答案最后化为一个关于 t 的二次不等式（quadratic inequality）。

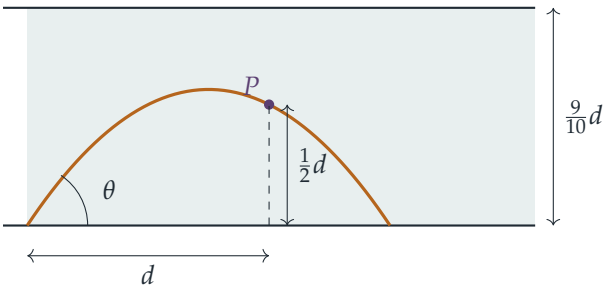
解答

最大高度

把粒子视为在重力作用下自由运动的质点，不计空气阻力（air resistance）。取抛射点为原点建立坐标轴，x 轴水平，y 轴垂直向上。速度的垂直分量（vertical component）起初为 $u\sin\theta$，并有恒定加速度 $-g$。在最高点垂直速度为零，所以在垂直方向应用 $v^2 = v_0^2 + 2as$，得

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH, \qquad \text{所以} \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

隧道



粒子的路径可由 $x = uT\cos\theta$ 与 $y = uT\sin\theta - \frac{1}{2}gT^2$ 消去时间 T 而得：

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = xt - \frac{gx^2(1+t^2)}{2u^2},$$

其中 $t = \tan\theta$，并用了 $\sec^2\theta = 1 + t^2$。

通过 P。 代入 $x = d$、$y = \frac{1}{2}d$，再除以 d：

$$\frac{1}{2} = t - \frac{gd(1+t^2)}{2u^2}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{gd(1+t^2)}{2u^2} = t - \frac{1}{2}.$$

左边为正数，所以必须有 $t > \frac{1}{2}$。（这是合理的：粒子起初朝 θ 方向运动，而重力只会把路径向下弯，所以只有瞄准的方向高于通往 P 的直线时才能到达 P，而该直线的斜率为 $\frac{1}{2}$。）对每个这样的 θ，恰好有一个速率符合要求：

$$u^2 = \frac{gd(1+t^2)}{2t-1}.$$

? **想一想** 题目没有给出 u 的值。条件怎么可能只与 θ 有关?

因为速率并不由我们选择：一旦 θ 固定，“通过 P”这个条件就把 u 确定下来。所以最大高度其实只是 θ 的函数。

不碰隧道顶。 把 $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ 代入 H 的公式，

$$H = \frac{u^2}{2g}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{d(1+t^2)}{2(2t-1)}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{dt^2}{2(2t-1)}.$$

粒子不碰隧道顶，当且仅当 $H < \frac{9}{10}d$。由于 $2t-1 > 0$，我们可以把不等式两边同乘 $10(2t-1)/d$ 而不必改变不等号的方向：

$$\begin{aligned}\frac{dt^2}{2(2t-1)} < \frac{9d}{10} &\iff 5t^2 < 9(2t-1)\\ &\iff 5t^2 - 18t + 9 < 0\\ &\iff (5t-3)(t-3) < 0\\ &\iff \tfrac{3}{5} < t < 3.\end{aligned}$$

这个区间内的每个 t 都满足 $t > \frac{1}{2}$，所以先前的条件没有带来额外限制。若 $t = \frac{3}{5}$ 或 $t = 3$，粒子刚好触及隧道顶，这种情况被排除。由于粒子始终没有碰到隧道顶，它会落回地面，并在隧道内着地。

最后，θ 介乎 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间，而 tan 在此范围内递增，所以

$$\arctan\tfrac{3}{5} < \theta < \arctan 3,$$

这正是所要证明的结果。

验算

- 当 $t = 3$ 时：$H = \dfrac{9d}{2\cdot 5} = \frac{9}{10}d$；当 $t = \frac{3}{5}$ 时：$H = \dfrac{(9/25)d}{2\cdot(1/5)} = \frac{9}{10}d$。两个端点都刚好擦过隧道顶，正如所料。
- 当 $t \to \frac{1}{2}^{+}$ 时，所需速率 $u \to \infty$，且 $H \to \infty$：粒子几乎沿着通往 P 的直线运动，所以它必须非常快，其后亦会升得非常高。
- 数值方面，取 $d = 3$ 和 $g = 9.8$，我们测试了 10^5 个随机角度。对每个角度，我们求出 u，确认路径通过 P，并发现 $H < \frac{9}{10}d$ 当且仅当 $0.5404 < \theta < 1.2490$（即以弧度表示的 $\arctan 0.6$ 和 $\arctan 3$）。逐步模拟亦确认了 $H = u^2\sin^2\theta/(2g)$。

常见错误

- 把 u 当作另一个独立的未知数，结果做不下去：必须利用在 P 的条件把它消去。
- 把不等式两边同乘 $2t-1$ 之前，忘记检查它的正负。
- 只检查 P 是否在隧道顶之下。路径的最高点通常出现在 P 之后，所以真正重要的是最大高度。

STEP 之外

把轨迹（trajectory）以 $\tan\theta$ 表示，可将抛体（projectile）问题化为关于 t 的二次式。同一技巧可求出以给定速率抛射的所有轨迹的“包络线”（envelope，即作为边界的抛物线），并给出击中目标的两个可能角度。像这样的问题，部分参数由约束条件确定，其余参数则构成一个容许区域，由此可通往最优化（optimisation）和变分法（calculus of variations）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是进一步学习这类力学的极佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。