详细解答

STEP I 2004，第 8 题

纯数学 · 单调数列与数学归纳法

STEP I 2004，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s1-q8

关键思路

要证明一个数列（sequence）递增，可把差 $t_{n+1}-t_n$ 看成 t_n 的函数。在两部分中，这个差都可以因式分解，而所得的因式正好对应递推关系（recurrence）的不动点（fixed point）2 和 3（即令 $t_{n+1}=t_n$ 的值）。于是差的正负只取决于 t_n 相对于 2 和 3 的位置，所以真正要下工夫的，是用归纳法（induction）证明每一项都留在适当的区域内。

解答

第 (i) 部分

对任意 n，

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2+6}{5}-x_n=\frac{x_n^2-5x_n+6}{5}=\frac{(x_n-2)(x_n-3)}{5}.$$

若 $x_n>3$，则两个因式皆为正，所以 $x_{n+1}-x_n>0$，即 $x_{n+1}>x_n$。

余下要验证每一项都大于 3，我们用归纳法来证明。根据假设，命题 $x_n>3$ 在 $n=0$ 时成立。假设 $x_n>3$。由上面的计算，$x_{n+1}>x_n>3$，所以亦有 $x_{n+1}>3$。因此对所有 $n\geq 0$ 都有 $x_n>3$，从而对所有 $n\geq 0$ 都有 $x_{n+1}>x_n$：这个数列严格递增（strictly increasing）。

? **想一想** 为甚么只证明 $x_1>x_0$ 并不足够?

不等式 $x_{n+1}>x_n$ 是由 $x_n>3$ 推导出来的，所以我们在每一步都需要这个条件，而不仅是第一步。在这里，这个条件不费工夫便可得到：从大于 3 的位置再向上走一步，仍然大于 3。（留意若起始值恰好是 $x_0=3$，便会得到常数数列，所以严格不等式是必要的。）

第 (ii) 部分

首先留意，若 $2 < y_n < 3$，则 $y_n > 0$，所以 $y_{n+1} = 5 - 6/y_n$ 有定义。对这样的 y_n，

$$y_{n+1} - y_n = 5 - \frac{6}{y_n} - y_n = -\frac{y_n^2 - 5y_n + 6}{y_n} = \frac{(y_n - 2)(3 - y_n)}{y_n},$$

此式为正，因为 $y_n - 2 > 0$、$3 - y_n > 0$ 及 $y_n > 0$。所以只要 $2 < y_n < 3$，便有 $y_{n+1} > y_n$。

与第 (i) 部分一样，我们必须证明每一项都位于这个区间内。这次它不会自动成立，因为递增的数列有可能越过 3。所以我们考察各项与 3 的距离：

$$3 - y_{n+1} = 3 - 5 + \frac{6}{y_n} = \frac{6 - 2y_n}{y_n} = \frac{2(3 - y_n)}{y_n}.$$

? **想一想** 我们怎样知道这个数列永远不会跳过 3?

上式说明，只要 $y_n > 0$，$3 - y_{n+1}$ 便与 $3 - y_n$ 同号。所以小于 3 的一项之后，紧接的一项必定也小于 3。

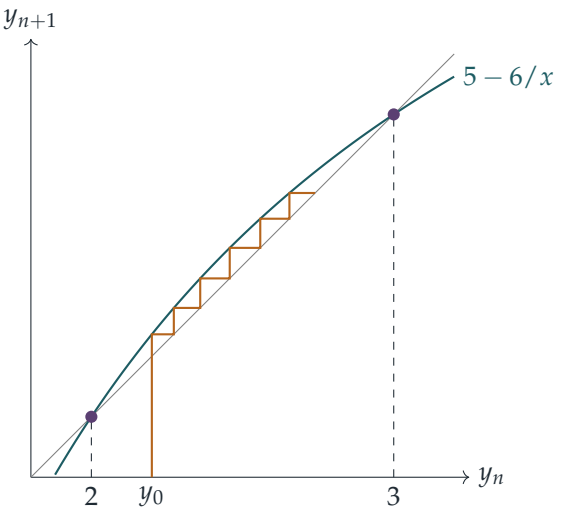
现在进行归纳。断言：对所有 $n \geq 0$，$2 < y_n < 3$。根据假设，这在 $n = 0$ 时成立。假设 $2 < y_n < 3$。那么：

- 由关于差的计算，$y_{n+1} > y_n > 2$；
- $3 - y_{n+1} = 2(3 - y_n)/y_n > 0$，因为 $3 - y_n > 0$ 及 $y_n > 0$，所以 $y_{n+1} < 3$。

因此 $2 < y_{n+1} < 3$，归纳完成。

由于对每个 n 都有 $2 < y_n < 3$，关于差的计算在每一步都适用，所以对所有 $n \geq 0$ 都有 $y_{n+1} > y_n$。这个数列严格递增，但对所有 n 仍有 $y_n < 3$，正如所求。

蛛网图（cobweb diagram）显示了实际的情况：曲线 $y = 5 - 6/x$ 与直线 $y = x$ 相交于 $x = 2$ 和 $x = 3$，在两者之间曲线位于直线上方，而各次迭代的值向着 3 攀升，却始终达不到它。



验算

- 在不动点处，递推关系给出常数数列：$(3^2+6)/5=3$，以及 $5-6/3=3$、$5-6/2=2$，与因式 $(t-2)(t-3)$ 吻合。
- 由 $y_0=2.5$ 开始：$y_1=2.6$，$y_2\approx 2.692$，$y_3\approx 2.771$，递增且小于 3；经过 200 步后，y_n 与 3 相差不超过 10^{-15}。由 $x_0=3.1$ 开始：$x_1=3.122$，$x_2\approx 3.149$，递增。
- 我们用电脑以精确分数对数百个随机起始值检验了两个归纳论证，并确认当 x_0 略小于 3 时会得到 $x_1<x_0$，所以条件 $x_0>3$ 是必需的。

常见错误

- 在假设 $x_n>3$ 之下证明了 $x_{n+1}>x_n$ 便停下来，没有用归纳法证明每一项都大于 3。
- 在第 (ii) 部分，证明了 $y_{n+1}<3$，却忘记要继续归纳还需要 $y_{n+1}>2$（它可由 $y_{n+1}>y_n$ 推出）。
- 把不等式两边同乘以 y_n，却没有指出 $y_n>0$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的数列是有界的递增数列，而数学分析中的*单调收敛定理*（monotone convergence theorem）指出，这样的数列必定收敛；任何极限 L 都满足 $L=5-6/L$，所以这里 $y_n\to 3$。在第 (i) 部分，数列递增而且无上界，因为有限的极限必须是一个大于 3 的不

动点，而这样的不动点并不存在。迭代的值究竟被不动点吸引还是排斥，取决于映射在该点的斜率，这正是离散动力系统（discrete dynamical systems）理论的起点。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对单调收敛有严谨细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。